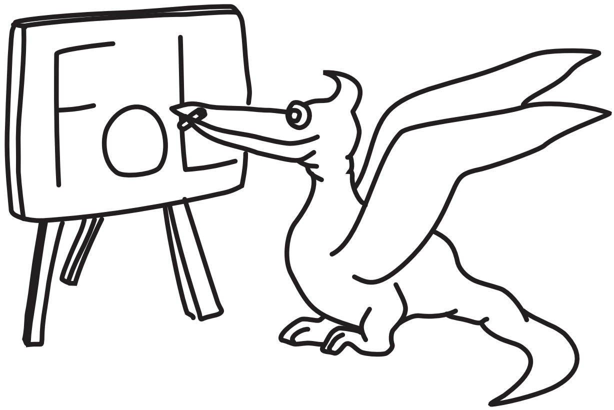
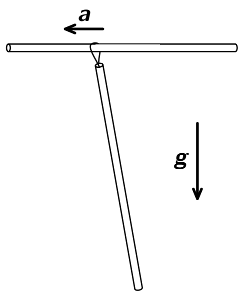
Řešení úloh 2. ročníku Fyziklání online



Úloha FoL.1 ... závěs

Představte si tenkou tuhou homogenní tyč o hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$ a délce $l = 2\,\mathrm{m}$. Na jednom jejím konci je připevněno nehmotné očko, které bez tření klouže po pevné vodorovně zavěšené hrazdě s konstantním zrychlením $a = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Tento pohyb očka způsobil konstantní náklon tyče o úhel φ vzhledem k zemské svislici. Jaká je jeho velikost, pokud se tento děj odehrává na zemském povrchu s tíhovým zrychlením $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$? Předpokládejte, že mezi tyčí a vzduchem není tření. Uvádějte svoji odpověď v radiánech. *Náry věnujíce se studiu záclony.*



Obr. 1: K úloze 1

Jediným stupněm volnosti takového systému je úhel náklonu tyče. Ze zadání však víme, že se nemění. Tyč je tedy vůči očku v klidu. Aby toto mohlo nastat, nutně musí platit, že se každý bod tyče pohybuje se stejným vektorem zrychlení jako očko. Z toho okamžitě plyne, že na každý její bod působí tahová síla tyče, jejíž horizontální komponenta je přesně síla potřebná na urychlování bodu o velikosti zrychlení a. Protože tu však existuje ještě tíhová síla, musí taktéž platit, že vertikální komponenta tahové síly tyče, přesně kompenzuje sílu tíhovou. Body tyče se pohybují jen v horizontálním směru. Z jednoduché geometrické představy rozložení sil a faktu, že tyč přenáší sílu ve směru normály, dojdeme k závěru, že poměr obou složek zrychlení je roven poměru horizontální a vertikální složky vzdálenosti konců tyče. To znamená jediné

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a}{g}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot vyjde $\varphi \doteq 0{,}46\,\mathrm{rad}$.

Jiří Nárožný
`nahry@fykos.cz`

Úloha FoL.2 ... oběšenci

Na dvou závěsech stejné délky l upevněných v jednom bodě visí ve vzduchu o hustotě $\varrho_\mathrm{v} = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ dvě kuličky hmotnosti m nabité souhlasným nábojem q. Vlivem jejich odpuzování svírají závěsy na vzduchu úhel α. Když kuličky ponoříme do olivového oleje s relativní permitivitou $\varepsilon_\mathrm{r} = 3$ a hustotou $\varrho_\mathrm{o} = 900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, zůstane úhel α stejný. Permitivitu vzduchu považujte za permitivitu vakua. Uvažujte tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jakou hustotu ϱ_k mají kuličky?
f(Aleš) četl příklad o kuličkách a rozhodl se propočítat jim příjemnější životní situaci.

Na každou z kuliček budou působit obecně dvě síly, jedna spojená s jejím nábojem F_e, kterou můžeme vypočítat podle Coulumbova zákona, a jedna F_g spojená s její hmotností. Bude tedy platit

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q^2}{4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)l^2},$$
$$F_g = V\left(\varrho_k - \varrho_p\right)g,$$

kde ϱ_p je hustota prostředí.

Tyto dvě síly jsou na sebe kolmé, síla spojená s hmotností působí svisle a vyjadřuje vlastně spojení síly tíhové a vztlakové, zatímco síla Coulumbova působí horizontálně.

Z geometrie úlohy je jasné, že platí

$$\frac{F_e}{F_g} = \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Označíme-li velikost sil po ponoření do oleje čárkovaně, pak vzhledem k tomu, že se úhel nezmění, bude zřejmě platit

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{F'_e}{F'_g},$$

odtud už plyne

$$\frac{1}{\varrho_k - \varrho_v} = \frac{1}{\left(\varrho_k - \varrho_o\right)\varepsilon_r},$$

kde jsme využili předpokladu, že permitivita vzduchu je shodná s permitivitou vakua.

Snadno pak vyjádříme

$$\varrho_k = \frac{\varrho_o\varepsilon_r - \varrho_v}{\varepsilon_r - 1}.$$

Číselně dostaneme $\varrho_k \doteq 1349{,}4\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha FoL.3 ... mokrá skála

Těžiště horolezce držícího se na svislé skále se nachází ve výšce $h = 24\,\mathrm{m}$. Poslední jištění (tedy místo, kde je jeho lano protáhlé kruhem, který je připevněn ke skále) je ve výšce $h_0 = 20\,\mathrm{m}$. Horolezec uklouzne a spadne. Jak nejblíže k zemi se horolezec dostane? Youngův modul pružnosti lana je $E = 100\,\mathrm{MPa}$, jeho poloměr je $r = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ a hmotnost lezce je $m = 70\,\mathrm{kg}$. Hmotnost lana a jakékoliv tření zanedbejte. Předpokládejte, že lano je k horolezci přivázáno v jeho těžišti. Vzdálenosti jsou uvedeny od jističe, který stojí na zemi a během pádu se nepohne. Uvažujte tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. *Honza dělal psychickou přípravu na lezení.*

Z definice Youngova modulu pružnosti víme, že se lano bude chovat jako pružinka tuhosti $E\pi r^2/h$. Označme l délku, o kterou se lano během pádu protáhne. Celkově tedy lezcovo těžiště kleslo o $2\left(h - h_0\right) + l$. Ze zákona zachování energie pak dostaneme

$$mg\left(2\left(h - h_0\right) + l\right) = \frac{1}{2}\frac{E\pi r^2}{h}l^2.$$

Tuto kvadratickou rovnici pro l vyřešíme a výšku, ve které se lezec zastaví, dopočítáme jednoduše ze vztahu $h - 2(h - h_0) - l \doteq 7{,}7\,\mathrm{m}$.

Jan Humplík
honza@fykos.cz

Úloha FoL.4 ... plynová přepážka

V uzavřené cylindrické nádobě se nachází volně pohyblivá přepážka, která nádobu rozděluje na dvě komory. V jedné komoře se nachází $25\,\mathrm{mg}$ $\mathrm{N_2}$ *a ve druhé* $40\,\mathrm{mg}$ He*. Předpokládejme, že se ustanovila rovnováha. Jaký bude poměr délek obou komor v rovnovážném stavu? Oba plyny považujte za ideální. Výsledek je číslo menší než jedna.*

Janapčino objevování pokladů ve starém sešitě.

V případě rovnováhy je tlak v obou komorách stejný. Vypočítáme si počet molů v každé komoře. V tabulkách musíme vyhledat molární hmotnosti M, které činí pro molekulu dusíku $28\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ a pro helium $4\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. Dosadíme do vzorce pro počet molů, kde $n = m/M$, m značí hmotnost plynu v komoře. Vyjdeme ze zákona o ideálním plynu, plochu podstavy komory označíme S a hledanou délku L, pak

$$p = \frac{n_1 RT}{SL_1} = \frac{n_2 RT}{SL_2}\,,$$

odkud $L_1/L_2 = n_1/n_2 \doteq 0{,}089$.

Jana Poledniková
janap@fykos.cz

Úloha FoL.5 ... Pojďme hrát kuličky!

Jak dlouho bude probíhat elektrolýza při galvanickém pokovování (elektrolytem je roztok síranu měďnatého) železné koule o hmotnosti $m_{\mathrm{Fe}} = 8\,\mathrm{kg}$ *a hustotě* $\varrho_{\mathrm{Fe}} = 8\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$*, pokud chceme, aby se na celém povrchu koule vytvořila* $\Delta r = 2\,\mathrm{mm}$ *tlustá vrstvička mědi o molární hmotnosti* $M_{\mathrm{Cu}} = 63{,}5\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$ *o hustotě* $\varrho_{\mathrm{Cu}} = 9\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$*, při konstantním použitém proudu* $I = 0{,}5\,\mathrm{A}$*? Výsledek uveďte v celých dnech zaokrouhlených nahoru (např. 3,238 dne jsou 4 dny).*

Kiki vzpomínala na chemickou olympiádu.

Pro řešení příkladu potřebujeme zjistit, jaké množství mědi m_{Cu} se při elektrolýze vyloučí na povrch koule. Z hustoty ϱ_{Fe} převedené na základní jednotky a hmotnosti m_{Fe} získáme objem železné koule $V_{\mathrm{Fe}} = m_{\mathrm{Fe}}/\varrho_{\mathrm{Fe}}$. Pro objem koule však také platí $V = 4\pi r^3/3$, jsme tedy schopni dopočítat poloměr železné koule r a víme také, že poloměr koule po pokovování má být $R = r + \Delta r$, kde $\Delta r = 0{,}002\,\mathrm{m}$. Její objem tedy bude $V = 4\pi R^3/3$. Protože se v tomto případě objemy železa a mědi spolu nijak nemísí, ale pouze se vrství na sebe, bude platit, že objem vyloučené mědi bude $V_{\mathrm{Cu}} = V - V_{\mathrm{Fe}}$. Její hmotnost tedy bude $m_{\mathrm{Cu}} = V_{\mathrm{Cu}}\varrho_{\mathrm{Cu}}$ v základních jednotkách. Vztah pro hmotnost mědi m_{Cu} s použitím námi známých veličin tedy bude

$$
\begin{aligned}
m_{\mathrm{Cu}} &= V_{\mathrm{Cu}}\varrho_{\mathrm{Cu}}\,,\\
m_{\mathrm{Cu}} &= (V - V_{\mathrm{Fe}})\,\varrho_{\mathrm{Cu}}\,,\\
m_{\mathrm{Cu}} &= \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{m_{\mathrm{Fe}}}{\varrho_{\mathrm{Fe}}}\right)\varrho_{\mathrm{Cu}}\,,\\
m_{\mathrm{Cu}} &= \left(\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3m_{\mathrm{Fe}}}{4\pi\varrho_{\mathrm{Fe}}}} + \Delta r\right)^3 - \frac{m_{\mathrm{Fe}}}{\varrho_{\mathrm{Fe}}}\right)\varrho_{\mathrm{Cu}}\,.
\end{aligned}
$$

Se znalostí hmotnosti mědi m_{Cu} určíme čas t, po který elektrolýza probíhala, pomocí Faradayových zákonů $m = AIt$, kde A je elektrochemický ekvivalent $A = M_{\mathrm{Cu}}/(Fz)$, kde $M_{\mathrm{Cu}} = 0{,}0635\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$ je molární hmotnost mědi, $F = 96\,485\,\mathrm{C{\cdot}mol^{-1}}$ je Faradayova konstanta a $z = 2$ je počet elektronů, který se vyloučí při přechodu jednoho kationtu měďnatého s oxidačním číslem II na atom mědi s oxidačním číslem 0. Čas t tedy vypočteme jako

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{m_{\mathrm{Cu}}}{AI}\,,\\
t &= \frac{m_{\mathrm{Cu}}Fz}{IM_{\mathrm{Cu}}}\,.
\end{aligned}
$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme hodnotu $t \doteq 5\,462\,\mathrm{ks}$, což odpovídá 64 dnům po zaokrouhlení nahoru na celé dny.

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha FoL.6 ... pruží to

Ve vesmíru jsme zapomněli pružinku délky $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$ a tuhosti $k = 5\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Na jednom konci je upevněno závaží s hmotností $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, na druhém konci o něco těžší závaží s hmotností $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$. Vypočítejte periodu malých kmitů pružinky. *Našiel Paťo vo svojom starom zošite.*

V izolovanej inerciálnej sústave ťažisko nezrýchľuje. V ťažiskovej sústave teda musí byť perióda kmitov jedného závažia rovnaká ako perióda druhého závažia. Ťažisko je vzdialené od kilového závažia o

$$x = l\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Rozdeľme si pružinku ťažiskom na dve sériovo spojené časti. Tuhosť takejto kratšej pružinky je daná nepriamou úmerou k celkovej tuhosti pružinky (kratšia pružinka je tuhšia ako dlhšia pružinka), teda

$$k_1 = k\frac{l}{x} = k\frac{m_1 + m_2}{m_2}\,.$$

Perióda kmitov sústavy je rovná perióde kmitov tejto časti, teda

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}\,,$$

čo po dosadení číselných hodnôt dáva $T \doteq 2{,}43\,\mathrm{s}$.

Patrik Švančara
`pato@fykos.cz`

Úloha FoL.7 ... roztahovačný balón

Uzavřený heliový balón vzlétá z povrchu Země, kde je teplota 300 K *a tlak* 101 kPa*. Dostane se až do místa, kde je tlak* 78 kPa *a teplota* 258 K*. Kolikrát se zvětší poloměr balónu, pokud budeme uvažovat, že balón je koule, jejíž počáteční poloměr byl* 10 m*? Balón je v termodynamické rovnováze s okolím. Zanedbejte povrchové napětí povrchu balónu.*

Tomášovi se zdálo, že létá v balónu.

Dosazením do stavové rovnice získáme vztah

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}\,.$$

Poměr V_2/V_1 tedy lze vyjádřit vztahem

$$\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \doteq 1{,}114\,.$$

Původní objem balónu lze vyjádřit jako $V_1 = 4\pi r_1^3/3$. Nový objem tedy vyjádříme takto

$$V_2 = V_1 \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{4\pi}{3} r_2^3 = \frac{4\pi}{3} r_1^3 \cdot \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}\,.$$

Poměr poloměrů tedy můžeme určit jako

$$\sqrt[3]{\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}} \doteq 1{,}037\,.$$

Tomáš Bárta
tomas@fykos.cz

Úloha FoL.8 ... odporný hranol

Hrany pravidelného čtyřbokého jehlanu jsou tvořeny dráty a ve všech vrcholech jsou spojené. Spočítejte odpor mezi dvěma protilehlými vrcholy podstavy, je-li odpor jednoho metru drátu 1 Ω*, výška jehlanu* $\sqrt{7}$ m *a délka hrany podstavy* 2 m*.*

Pikoš při opravování úlohy se zeměkoulí.

Hledáme odpor mezi dvěma protilehlými vrcholy podstavy pravidelného čtyřbokého jehlanu. Oba zbývající vrcholy podstavy mají ze symetrie stejný potenciál, dokonce stejný jako vrchol jehlanu. Dráty mezi dvěma vrcholy podstavy, mezi nimiž neměříme odpor, a vrcholem jehlanu neteče tedy žádný proud, můžeme je tedy odstranit. Pak nám zbude paralelní zapojení tří dvojic rezistorů, přičemž v každé dvojici jsou stejné rezistory. Ve dvou dvojicích jsou rezistory o odporu 2 Ω a v jedné dvojici rezistory o odporu (dle Pythagorovy věty)

$$\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}\right)^2}\,\Omega = 3\,\Omega\,.$$

Hledaný odpor je tedy 1,5 Ω.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha FoL.9 ... družice

Mějme planetu a její měsíc. Ty společně obíhají v rovině kolem společného hmotného středu po kruhových drahách. Tečná rychlost měsíce vůči hmotnému středu soustavy je $2{,}5\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Jaký by musel být poměr hmotnosti planety ku hmotnosti měsíce, aby byl hmotný střed soustavy na povrchu planety? Hmotnost planety je $M_\mathrm{p} = 7{,}6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, poloměr planety je $R_\mathrm{p} = 7\,436\,\mathrm{km}$ a poloměr měsíce je $R_\mathrm{m} = 1\,943\,\mathrm{km}$. *Nicola přemýšlela nad těžištěm soustavy dvou těles.*

Nejprve si potřebujeme pomocí rychlosti v vypočítat vzdálenost h středu měsíce od povrchu planety. To odvodíme z $F_g = F_\mathrm{d}$

$$\kappa \frac{M_\mathrm{p} M_\mathrm{m}}{(R_\mathrm{p} + h)^2} = \frac{M_\mathrm{m} v^2}{h} \,.$$

To můžeme upravit na kvadratickou rovnici pro h

$$0 = h^2 + \left(2R_\mathrm{p} - \frac{\kappa M_\mathrm{p}}{v^2} \right) h + R_\mathrm{p}^2 \,, \tag{1}$$

označíme-li $x = h/R_\mathrm{p}$, dostáváme

$$0 = x^2 + \left(2 - \frac{\kappa M_\mathrm{p}}{v^2 R_\mathrm{p}} \right) x + 1 \,.$$

Potřebujeme, aby těžiště této soustavy leželo na povrchu planety. To můžeme zapsat podmínkou

$$R_\mathrm{p} = \frac{(h + R_\mathrm{p}) M_\mathrm{m}}{M_\mathrm{m} + M_\mathrm{p}} \,,$$

což po vynásobení $M_\mathrm{m} + M_\mathrm{p}$ a vydělení $M_\mathrm{m} R_\mathrm{p}$ dává

$$\frac{M_\mathrm{p}}{M_\mathrm{m}} + 1 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{M_\mathrm{p}}{M_\mathrm{m}} \,.$$

Nyní již stačí pouze vyřešit kvadratickou rovnici (1) a dostáváme výsledek $x = M_\mathrm{p}/M_\mathrm{m} \doteq 8{,}79$.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha FoL.10 ... smyčka

Zdroj emituje elektrony s rychlostí $v = 1{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, které vlétají v bodě P *do homogenního magnetického pole o magnetické indukci $B = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$. Vektor rychlosti svírá úhel $\varphi = 15^\circ$ s vektorem magnetické indukce. Určete vzdálenost bodu* P *od místa, kde elektron poprvé znovu protne indukční čáru, která bodem* P *prochází.* *Zdeněk se teleportoval dovnitř obrazovky.*

Nejprve rozložíme rychlost v na složku kolmou k vektoru tečnému k magnetickým indukčním čarám, tj. $v_x = v \sin\varphi$, a složku rovnoběžnou s indukčními čarami, tj. $v_y = v \cos\varphi$. Lorentzova síla působící na elektron je zároveň silou dostředivou, tedy

$$Q v_x B = \frac{m v_x^2}{r} \,.$$

Z tohoto vztahu lze snadno vyjádřit r

$$r = \frac{mv_x}{QB} \,.$$

Periodu pohybu po kružnici je pak možno vyjádřit jako

$$T = \frac{2\pi r}{v_x} = \frac{2\pi m}{QB} \,.$$

Tento čas je potřeba k tomu, aby elektron znovu protnul stejnou indukční čáru. Mezitím ve směru rovnoběžném s indukčními čarami urazí vzdálenost s

$$s = v_y \frac{2\pi m}{QB} \,.$$

Po dosazení náboje a hmotnosti elektronu vychází $s \doteq 0{,}52\,\mathrm{m}$.

__Zdeněk Jakub__
`zdenekjakub@fykos.cz`

Úloha FoL.11 ... ekologický pasivista

Zapálený, hubený dendrista (vážící pouhých $m = 50\,\mathrm{kg}$) se doslechl, že město chce pokácet jeho oblíbený strom ve Stromovce. Rozhořčeně vyšplhal až na vrch svého zeleného, homogenního kamaráda s přesvědčením, že tak zabrání vraždě. Dřevorubci přišli a strom o výšce $h = 10\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $M = 1\,\mathrm{t}$ podřízli těsně u země. Jakou rychlostí se překvapený dendrista přiřítil k zemi? Uvažujte tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. *Terka lezla po stromech.*

Vyjdeme ze zákona zachování energie. Potenciální energie soustavy strom a dendrista bude

$$E_\mathrm{p} = g\left(mh + \frac{h}{2}M\right) \,.$$

Kinetická energie při dopadu bude dána momentem setrvačnosti I jako

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} I\omega^2 \,.$$

Moment setrvačnosti spočteme pomocí Steinerovy věty

$$I = \frac{1}{12}Mh^2 + M\left(\frac{h}{2}\right)^2 + mh^2 \,.$$

Dostaneme rovnici (zákon zachování energie)

$$hg\,(2m + M) = \left(\frac{1}{3}M + m\right) h^2\omega^2 \,.$$

Odtud vyjádříme ω a pro hledané v bude platit $v = \omega h$, tj.

$$v = \sqrt{\frac{3M + 6m}{M + 3m} gh} \,.$$

Číselně dostaneme $v \doteq 16{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

__Aleš Flandera__
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha FoL.12 ... jádro na dietě

Jaký by byl součet vazebných energií v jádrech v jednom molu jader prvku, pokud by platilo, že nukleonové číslo tohoto prvku je $A = 36$, protonové číslo je $Z = 17$ a hmotnost jednoho jádra tohoto prvku by byla $m_\mathrm{j} = 5{,}99965 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$? Výsledek udeďte v TJ.

Kiki se nudila na anorganice.

Prvek obsahuje $Z = 17$ protonů a $N = A - Z = 19$ neutronů. Pro hmotnost protonu jakožto samostatné částice platí $m_\mathrm{p} = 1{,}6725 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, pro neutron $m_\mathrm{n} = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Jádro prvku by tedy teoreticky (při sečtení hmotností jednotlivých protonů a neutronů, které obsahuje) mělo vážit $m_\mathrm{t} = 17m_\mathrm{p} + 19m_\mathrm{n}$. Reálná hmotnost jádra je však menší a daný hmotnostní úbytek

$$\delta m = m_\mathrm{t} - m_\mathrm{j}$$

je přímo úměrný vazebné energii v jádře podle $E = \delta m\, c^2$. Chceme-li energii 1 molu takovýchto jader, pak platí $E_\mathrm{m} = N_A \cdot E$, kde $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ je Avogadrova konstanta. Po dosazení číselných hodnot dostaneme $E_\mathrm{m} \doteq 1{,}40 \cdot 10^{13}\,\mathrm{J} = 14{,}0\,\mathrm{TJ}$.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha FoL.13 ... hudba lokomotiv

Dvě lokomotivy A a B se pohybují rychlostmi $v_A = 15\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ doprava a $v_B = 30\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ doleva proti sobě na paralelních kolejích. Lokomotiva A zahouká na frekvenci 200 Hz. Rychlost zvuku je $340\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Předpokládejme, že některé zvukové vlny se odrazí od lokomotivy B zpět k lokomotivě A. Na jaké frekvenci je strojvedoucí z lokomotivy A uslyší? Předpokládejte že pohyb doprava je kladný a prostředí nehybné vůči zemi.

Janapka si hrála s vláčky.

Úloha využívá Dopplerova efektu. Prvně si spočítáme, jakou frekvenci uslyší strojvedoucí v lokomotivě B. Lokomotiva A se pohybuje doprava, tedy kladně, rychlost prostředí je nulová. Lokomotiva B se pohybuje doleva, takže pozorovatelova rychlost je $-|v_B|$. Rychlost zdroje je rovna rychlosti lokomotivy A, pohybující se doprava, tedy kladně. Rychlost zvuku je c. Frekvence, kterou uslyší strojvůdce lokomotivy B, je rovna

$$f_B = f_0 \frac{c + |v_B|}{c - |v_A|} \doteq 228\,\mathrm{Hz}\,.$$

Tento mezivýsledek použijeme jako frekvenci vyslanou z lokomotivy B k lokomotivě A, neboť nás zajímá frekvence, kterou slyšíme v lokomotivě A. Opět aplikujeme Dopplerův zákon a můžeme napsat

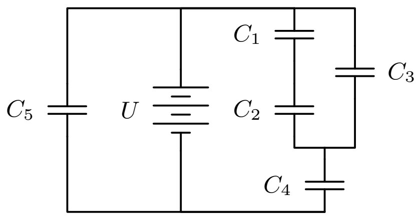
$$f_A = f_B \frac{c + |v_A|}{c - |v_B|} \doteq 261\,\mathrm{Hz}\,.$$

Jana Poledniková
janap@fykos.cz

Úloha FoL.14 ... kondenzátory v obvodu

Napětí baterie v obvodu na obrázku je 10 V *a každý z kondenzátorů má kapacitu* 10 μF. *Určete náboj v* μC *na kondenzátoru* C_1. *Dominika na větvi.*

Označíme si kondenzátory čísly dle obrázku. Připomeneme si pravidla pro počítání kapacity sériově C_s a paralelně C_p zapojených kondenzátorů C_a a C_b



Obr. 2: K řešení úlohy 14

$$\frac{1}{C_\mathrm{s}} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b}\,, \quad C_\mathrm{p} = C_a + C_b\,.$$

Podle těchto pravidel nahradíme kondenzátory C_1, C_2 a C_3 ekvivalentním kondenzátorem o kapacitě C_{123} a kondenzátory C_1, C_2, C_3 a C_4 ekvivalentním kondenzátorem o kapacitě C_{1234}

$$C_{123} = \frac{3}{2}C\,, \quad C_{1234} = \frac{3}{5}C\,.$$

Náboj v celé pravé větvi obvodu (tedy té s kondenzátory $C_{1\ldots4}$) je $Q_{1234} = U \cdot C_{1234}$ a ten se rovná náboji na kondenzátoru C_4 a také na skupině kondenzátorů $C_{1\ldots3}$: $Q_{1234} = Q_4 = Q_{123}$. Napětí na skupině $C_{1\ldots3}$ je $U_{123} = Q_{123}/C_{123}$. Na každém z kondenzátorů C_1 a C_2 bude stejný náboj, a to $Q_1 = Q_2 = U_{123} \cdot C_{12} = U_{123} \cdot \frac{C}{2}$. Vytvoříme-li obecný výsledek, dostaneme

$$Q_1 = \frac{1}{2}U_{123}C = \frac{1}{2}CU\frac{C_{1234}}{C_{123}} = \frac{1}{5}CU\,.$$

Po dosazení číselných hodnot $Q_1 = 20\,\mu\mathrm{C}$.

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`

Úloha FoL.15 ... brýle nebo kontaktní čočky

Aby Pepa dobře viděl na na svou oblíbenou křížovku ve vzdálenosti $D = 25$ cm *od oční čočky, potřebuje brýle s ohniskovou vzdáleností* $f_\mathrm{b} = 50$ cm. *Brýle má* $d = 2$ cm *od oční čočky s ohniskovou vzdáleností* $f_\mathrm{o} = 2$ cm. *Jakou ohniskovou vzdálenost (v centimetrech) by měly mít kontaktní čočky, které se přikládají přímo na čočku, aby stále ostřil na křížovku bez změny ohiskové vzdálenosti oční čočky? Všechny čočky považujte za tenké.* *Lukáš zíral do křížovek.*

Najprv vypočítame vzdialenosť od očnej šošovky, v ktorej sa v prípade s okuliarmi objaví obraz krížovky. Krížovka je od okuliarov vzdialená $d_\mathrm{b} = D - d$. Je to vzdialenosť menšia ako f_b, a tak bude obraz na tej istej strane. Jeho polohu s_b vzhľadom na okuliare získame zo zobrazovacej rovnice

$$-s_\mathrm{b} = \frac{1}{\frac{1}{f_\mathrm{b}} - \frac{1}{D-d}}\,.$$

Tento obraz je vzdialený $s_\mathrm{o} = s_\mathrm{b} + d$ od očnej šošovky. Z toho dostaneme výslednú vzdialenosť obrazu x

$$x = \frac{1}{\frac{1}{f_\mathrm{o}} - \frac{1}{s_\mathrm{o}}} = \frac{1}{\frac{1}{f_\mathrm{o}} - \frac{f_\mathrm{b}-D+d}{d(f_\mathrm{b}-D+d)+f_\mathrm{b}(D-d)}} = \frac{1204}{575}\,\mathrm{cm}\,.$$

Pre ohniskovú vzdialenosť f_c kontaktnej šošovky musí platiť

$$\frac{1}{f_\mathrm{c}} + \frac{1}{f_\mathrm{o}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{D}\,,$$

teda

$$f_\mathrm{c} = \frac{1}{\frac{1}{D} - \frac{f_\mathrm{b}-D+d}{d(f_\mathrm{b}-D+d)+f_\mathrm{b}(D-d)}} \doteq 56{,}9\,\mathrm{cm}\,.$$

Dávid Hvizdoš
david@fykos.cz

Úloha FoL.16 ... nadsvětelný elektron

Mějme Bohrův model ionizovaného atomu tvořený fixovaným jádrem (s protonovým číslem Z) a pouze jedním elektronem. Pro jaké nejmenší protonové číslo by byla rychlost oběhu elektronu v základním stavu větší než rychlost světla? Rychlost světla je $c = 299{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, náboj elektronu $e = -1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, Coulombova konstanta $k_\mathrm{e} = 8{,}987 \cdot 10^9\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}$ a redukovaná Planckova konstanta $\hbar = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$. Výpočet proveďte klasicky, nikoli relativisticky.

Jakub chcel zničiť svet.

Z Bohrova modelu atomu víme, že rychlost oběhu elektronu v základním stavu je

$$v_\mathrm{e} = \frac{Ze^2k_\mathrm{e}}{\hbar}\,.$$

Chceme, aby tato rychlost byla větší než rychlost světla

$$v_\mathrm{e} = \frac{Ze^2k_\mathrm{e}}{\hbar} > c\,.$$

Úpravou nerovnice dostaneme podmínku pro Z

$$Z > \frac{c\hbar}{e^2k_\mathrm{e}} \doteq 137{,}05\,.$$

Protože je počet protonů celé číslo, tak rychlost elektronu by překročila rychlost světla pro $Z = 138$.

Jakub Kocák
jakub@fykos.cz

Úloha FoL.17 ... ekoauto

Jaká hmotnost stlačeného plynu je ekvivalentní jednomu litru benzinu o výhřevnosti $L = 30\,\mathrm{MJ{\cdot}l^{-1}}$*? Předpokládejte, že plynem je vzduch o tlaku* $p_0 = 200\,p_{\mathrm{atm}}$*,* $p_{\mathrm{atm}} = 10^5\,\mathrm{Pa}$*, o hustotě za atmosférického tlaku* $\varrho_{\mathrm{atm}} = 1{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*, a je stále ještě ideálním plynem. Vzduch necháme izotermicky rozepnout a předpokládáme, že se žádná energie neztratí.*

Vymyslel Lukáš na výletu v Jizerských horách.

Napíšeme si stavové rovnice pre pôvodný, všeobecný a atmosférický tlak

$$p_0 V_0 = nRT\,, \quad pV = nRT\,, \quad p_{\mathrm{atm}} V_{\mathrm{atm}} = nRT\,.$$

Teplota aj látkové množstvo totiž ostáva konštantná.

Práca vykonaná plynom pri rozpínaní bude

$$W = \int_{V_0}^{V_{\mathrm{atm}}} p \mathrm{d}V = \int_{V_0}^{V_{\mathrm{atm}}} p_0 V_0 / V \,\mathrm{d}V = p_0 V_0 \ln \frac{V_{\mathrm{atm}}}{V_0} = p_0 V_0 \ln \frac{p_0}{p_{\mathrm{atm}}}\,.$$

Poznáme hustotu vzduchu $\varrho = m/V_{\mathrm{atm}}$, pre ktorú platí

$$p_{\mathrm{atm}} = \frac{\varrho_{\mathrm{atm}}}{M_{\mathrm{m}}} RT\,,$$

kde M_{m} je molekulová hmotnosť vzduchu. Zo stavových rovníc pre počiatočný stav takto môžeme vyjadriť súčin $p_0 V_0$

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M_{\mathrm{m}}} RT = m \frac{p_{\mathrm{atm}}}{\varrho_{\mathrm{atm}}}\,.$$

Prácu sme už vypočítali a položíme ju rovnú výhrevnosti jedného litra benzínu

$$L V_{\mathrm{B}} = W = p_0 V_0 \ln \frac{p_0}{p_{\mathrm{atm}}} = m \frac{p_{\mathrm{atm}}}{\varrho_{\mathrm{atm}}} \ln \frac{p_0}{p_{\mathrm{atm}}}\,,$$

odkiaľ

$$m = \frac{L V_{\mathrm{B}} \varrho_{\mathrm{atm}}}{p_{\mathrm{atm}} \ln \frac{p_0}{p_{\mathrm{atm}}}} \doteq 73{,}6\,\mathrm{kg}\,.$$

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha FoL.18 ... houpací sud

Těleso tvaru válce o poloměru $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$*, výšce* $l = 3\,\mathrm{m}$ *a o hmotnosti dvě tuny plave ve vodě o hustotě* ϱ *tak, že osa válce zůstává ve vertikální poloze. Těleso vychýlíme z rovnovážné polohy o* $\Delta x = 1\,\mathrm{mm}$ *ve svislém směru. Spočítejte periodu kmitů tělesa (v sekundách). Uvažujte tíhové zrychlení* $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$*.*

Pikoš z příkladů ze školy.

Na těleso působí tíhová síla $F_G = mg$, kde m je jeho hmotnost a g je tíhové zrychlení, a na ponořenou část tělesa též vztlaková síla

$$F_{\mathrm{v}} = V \varrho g\,,$$

kde V je objem ponořené části a ϱ je hustota kapaliny (vody). Jestliže je těleso v rovnovážné poloze, pak výslednice sil je nulová. Označme x_0 výšku ponořené části v případě, kdy je těleso v rovnováze. Pak $mg = \pi r^2 x_0 \varrho g$. Jestliže vychýlíme těleso z rovnovážné polohy o x směrem vzhůru, pak výška ponořené části bude $x_0 - x$ a výsledná síla působící na těleso bude

$$F = mg - \pi r^2 (x - x_0)\varrho g\,.$$

Dosadíme za x_0 z předchozí rovnosti a dostaneme

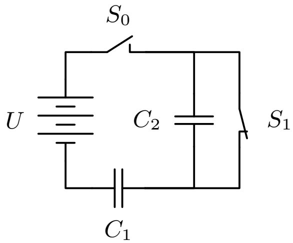
$$F = -\pi r^2 x \varrho g\,,$$

síla působící na těleso je tedy přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy, jedná se tedy o harmonický oscilátor tuhosti $\pi r^2 \varrho g$, a tedy perioda jeho kmitů je $2\pi\sqrt{m/(\pi r^2 \varrho g)} \doteq 3{,}2\,\mathrm{s}$.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha FoL.19 ... kapacitní tandem

Vypočtěte náboj na kondenzátoru C_2 v coulombech, pokud víte následující. Na samotném počátku děje byl spínač S_0 vypnut, spínač S_1 zapnut, jako na obrázku. Na obou kondenzátorech bylo nulové napětí. Následně se zapnul spínač S_0 a počkalo se, dokud nepřestane téci proud. V dalším kroku se vypnul spínač S_1 a opět se počkalo do ustálení děje. Poté byl na kondenzátoru C_2 změřen náboj. Napětí na zdroji stejnosměrného napětí je $U = 17\,\mathrm{V}$ a kapacity obou kondenzátorů jsou stejné, rovny $C = 1\,\mathrm{\mu F}$. *Náry měl elektrotechnickou náladu.*



Obr. 3: K zadání úlohy 19

Tento pokus s kondenzátory představuje velmi jednoduchý děj, při kterém do ustáleného obvodu s nabitým kondenzátorem připojíme kondenzátor další. Tento nový prvek obvodu však nefunguje jinak než obyčejný vodič, jelikož je zapojen ve chvíli, kdy se už potenciálové rozdíly vyrovnaly. Je na něm nulové napětí a tudíž i nulový akumulovaný náboj. To, že je tomu skutečně tak, můžeme nahlédnout z druhého Kirchhoffova zákona a zákona zachování elektrického náboje.

$$\frac{Q+q}{C} + \frac{q}{C} = U\,, \tag{2}$$

kde Q je původní náboj na kladné desce kondenzátoru C_1 a q náboj, který se na ni při vypnutí spínače S_1 navázal, a tedy o tento náboj byla ochuzena deska kondenzátoru C_2, která je s kladnou deskou kondenzátoru C_1 spojena.

Jelikož však z první fáze děje platí, že

$$\frac{Q}{C} = U\,, \tag{3}$$

nutně z rovnic (2) a (3) plyne, že $q = 0\,\mathrm{C}$.

Náboj na kondenzátoru C_2 bude $0\,\mathrm{C}$.

Jiří Nárožný
nahry@fykos.cz

Úloha FoL.20 ... heuréka

Mějme kostku o straně $a = 1\,\mathrm{m}$ a hustotě $\varrho_0 = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a nádobu s kapalinou, která má u hladiny hustotu rovněž ϱ_0 a pak lineárně roste s hloubkou $\varrho(h) = \varrho_0 + \alpha h$, kde $\alpha = 25\,\mathrm{kg\cdot m^{-4}}$. Uvažujte tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Do jaké hloubky H (v centimetrech) se kostka ponoří? Po vložení kostky se výška hladiny nezmění. *Terka se koupala ve zvláštních kapalinách.*

Použijeme Archimedův zákon: vrstvička kostky o výšce $\mathrm{d}x$ v hloubce x je nadlehčována silou odpovídající tíze kapaliny stejného objemu $ga^2(\varrho_0 + \alpha x)\mathrm{d}x$. Celková hmotnost, resp. tíha, vytlačené vody musí být rovna celkové hmotnosti kostky

$$\int_0^H (\varrho_0 + \alpha x)\mathrm{d}x = a^3 \varrho_0\,,$$

tedy řešením kvadratické rovnice

$$0 = \alpha H^2 + 2\varrho_0 H - 2a^3 \varrho_0\,,$$

$$H = \frac{\sqrt{\varrho_0^2 + 2\alpha a^3 \varrho_0} - \varrho_0}{\alpha}\,.$$

Po číselném dosazení vyjde $H \doteq 98{,}8\,\mathrm{cm}$.

Tereza Steinhartová
terkas@fykos.cz

Úloha FoL.21 ... ekologie nade vše

Spočítejte účinnost (poměr získané energie ku energii dodané) ukládání energie do stlačeného vzduchu. Při přebytku elektrické energie ze solárních elektráren začneme stlačovat adiabaticky vzduch na kompresní poměr $k = 10$. Když energii potřebujeme, necháme jej adiabaticky rozepnout na počáteční tlak, ale plyn nám v podzemních zásobnících předtím stihl (izochoricky) vychladnout na teplotu před začátkem stlačování. Vzduch považujte za ideální dvouatomový plyn. Výsledek uveďte v procentech. *Lukáš poslouchal reportáž o autu na stlačený vzduch.*

Veličiny s indexem 1 značí počáteční stav, index 2 značí stav po adiabatickém stlačení, index 3 odpovídá stavu před adiabatickou expanzí a index 4 po expanzi.

Nejdříve určíme energii dodanou plynu během adiabatického stlačování. Platí

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa - 1} = T_1 k^{\kappa - 1}\,.$$

Dodaná energie je

$$E_{\text{in}} = RnT_1\left(k^{\kappa-1} - 1\right) .$$

Pro určení parametrů ve stavu 3 použijeme stavovou rovnici, kde víme, že $T_3 = T_1$, proto

$$p_3 = kp_1 .$$

Dále uvážíme $p_4 = p_1$ a pro adiabatickou expanzi platí

$$T_4^\kappa = T_3^\kappa \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{1-\kappa} = T_1^\kappa k^{1-\kappa} \quad \Rightarrow \quad T_4 = T_1 k^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} .$$

Energie získaná z této adiabaty je

$$E_{\text{out}} = RnT_1\left(1 - k^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\right) .$$

Nyní můžeme již vypočítat účinnost

$$\eta = \frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} = \frac{1 - k^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}}{k^{\kappa-1} - 1} .$$

Nyní dosadíme pro dvouatomový plyn $\kappa = 1{,}4$ a vyjde $\eta \doteq 31{,}9\,\%$.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha FoL.22 ... rezistorový blackbox

Mějme krabičku, ve které se nachází tři rezistory o neznámých odporech. Tyto rezistory jsou propojeny dokonale vodivými dráty. Z krabičky vychází 4 vývody, ke kterým postupně připojujeme ohmmetr a sledujeme, jaký je mezi těmito body odpor. Zkusili jsme změřit odpor u pěti dvojic drátů. Měřené odpory byly $9\,\Omega$, $12\,\Omega$, $8\,\Omega$, $3\,\Omega$ a $14\,\Omega$. Nyní připojujeme ohmmetr k poslední dvojici vývodů. Jaký odpor naměříme? *Náry je neschopný.*

Jelikož ve výčtu měřených odporů není žádná dvojice stejná, poslední hodnota odporu je nenulová. Jelikož je nenulová, neexistuje v propojení žádná smyčka, neboli rezistory musí být v sérii nebo hvězdě. S touto podmínkou již jednoznačně určíme jak druh zapojení, tak jednotlivé velikosti odporů rezistorů a tedy i velikost odporu na poslední dvojici vývodů.

Odpory rezistorů si označme R_1, R_2 a R_3. Z faktu, jak mohou být rezistory propojeny, získáme, že měřené velikosti mohou být kombinací součtů těchto tří odporů, či těmito odpory samotnými. Takových případů je právě sedm. Jelikož bylo změřeno pět kombinací ze šesti, musí být nutně ve výčtu měřených odporů alespoň dvě hodnoty, jež odpovídají odporu některého z rezistorů. Z toho jednoduše plyne, že nejmenší měřený odpor musí být odporem některého z rezistorů, jelikož v opačném případě dostáváme, že součet odporů je menší než hodnota jednoho z nich. Ale protože jsou velikosti odporů nezáporné, docházíme ke sporu. Tento odpor je roven $3\,\Omega$ a označme si ho třeba R_1.

V dalším kroku od všech zbylých naměřených odporů odečteme odpor R_1. Existují právě tři dvojice potenciálně měřených odporů, pro které platí, že když od jedné hodnoty odečteme velikost odporu R_1, dostaneme hodnotu druhou. Protože jsme ale celkem provedli pět měření, musí ve výčtu měřených odporů určitě existovat aspoň jedna taková dvojice. Opravdu, odpory $12\,\Omega$

a $9\,\Omega$ se liší právě o $3\,\Omega$. Jelikož je to jediná dvojice z výčtu, a zároveň $12\,\Omega$ není nejvyšší měřená hodnota, musí být ten menší z odporů roven odporu druhého rezistoru (označíme jej R_2). Rozmyslete si!

Protože odpor $8\,\Omega$ je menší než odpor R_2, musí být odporem posledního rezistoru R_3, nebo součtem $R_1 + R_3$. V prvním případě by však výše uvedeným způsobem neexistovala možnost, jak v hvězdě nebo sérii vytvořit odpor $14\,\Omega$. Odpor rezistoru R_3 je $5\,\Omega$.

Z těchto údajů již jednoduše dovodíme, že rezistory jsou zapojeny ve hvězdě a poslední, šestý, měřený odpor je právě odporem posledního rezistoru, má tedy velikost $5\,\Omega$.

Jiří Nárožný
`nahry@fykos.cz`

Úloha FoL.23 ... oběžnice

Určete velikost magnetického pole v nanotesla v těžišti systému dvou planet, jež jsou nabity shodným nábojem velikosti $Q = 100\,\mathrm{TC}$ mající hmotnost $M = 5 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ a obíhající ve vzdálenosti $d = 500\,000\,\mathrm{km}$ od sebe. Při výpočtu magnetického pole považujte planety za bodové náboje a předpokládejte, že obíhají po kruhových drahách. Výsledek uveďte v nT.

Lukáš chtěl mermomocí vymyslet netradiční úlohu.

Planety se budou přitahovat silou

$$F = \frac{1}{d^2}\left(GM^2 - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right).$$

Aby odstředivá síla byla stejná jako přitažlivá (z pohledu neinerciální vztažné soustavy spojené s obíhajícími planetami), musí platit

$$v = \sqrt{\frac{dF}{2M}}.$$

Proud, který bude kolem středu téct, bude tedy

$$I = \frac{2Qv}{\pi d}$$

a z toho spočítáme velikost magnetické indukce

$$B = \mu_0 \frac{I}{\pi d} = \mu_0 \frac{2Qv}{(\pi d)^2} = \mu_0 \frac{2Q\sqrt{\frac{dF}{2M}}}{(\pi d)^2} \doteq 57{,}23\,\mathrm{nT}.$$

Tomáš Bárta
`tomas@fykos.cz`

Úloha FoL.24 ... rtuťotrysk

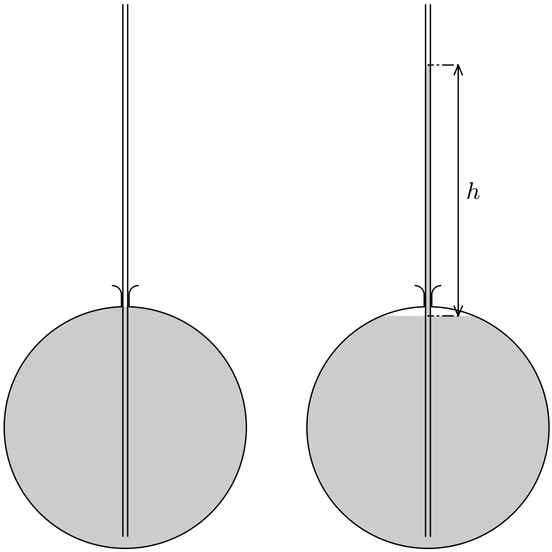
Mějme velkou baňku se lektvarem o hustotě $\varrho = 13\,600\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ nahoře utěsněnou a do ní vloženu tenkou kapiláru. Lektvar zahřejeme na teplotu varu za atmosférického tlaku $p_\mathrm{a} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$. O kolik se zvýší hladina lektvaru v kapiláře? Zanedbejte závislost povrchového napětí na teplotě a teplotní roztažnost jak lektvaru, tak skla. Uvažujte tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Celá *baňka je umístěna ve vakuu. Uvažujte, že parciální tlak par lektvaru je na počátku děje nulový.*

Lukáš si hrál s PET lahví.

Při zahřátí lektvaru na teplotu varu je parciální tlak par shodný s atmosférickým tlakem, proto lektar vystoupí v kapiláře do výšky

$$h = \frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g} \doteq 759\,\mathrm{mm}\,,$$

protože nad hladinou bude tlak p_a a v okolí je nulový tlak.



Obr. 4: K úloze 24

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha FoL.25 ... bezrozměrný vodík

Mějme energii základního stavu atomu vodíku (soustava protonu a elektronu) v nerelativistickém modelu se zafixovaným protonem. Energie soustavy je nulová, jsou-li proton a elektron od sebe nekonečně vzdáleny. Jaká bude energie v bezrozměrných jednotkách, pokud položíme hmotnost elektronu $m_\mathrm{e} = 1$, redukovanou Planckovu konstantu $\hbar = 1$ a $k_\mathrm{e} e^2 = 1$, kde k_e je Coulombova konstanta a e náboj elektronu? *Jakub byl donucený rozmýšlet.*

Z Bohrova modelu atomu vodíku víme, že energie základního stavu je

$$E_0 = -\frac{m_\mathrm{e} e^4 k_\mathrm{e}^2}{2\hbar^2}\,.$$

V tomto výrazu si veličiny, které byly zvoleny jako 1, vyznačíme a dosadíme za ně v nových jednotkách 1. Získáme energii v bezrozměrných jednotkách

$$E_0 = -\frac{1}{2}\frac{(m_e)\left(k_e e^2\right)^2}{(\hbar)^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Jakub Kocák
jakub@fykos.cz

Úloha FoL.26 ... skákal pes

Uvažujte kuličku ve výšce $h = 1\,\mathrm{m}$ nad podložkou. V jistý okamžik kuličku pustíme a zároveň začneme podložku zvedat rychlostí $V = 1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ vzhledem k počáteční klidové soustavě. Je-li mezi kuličkou a podložkou koeficient restituce $e = 0{,}3$, spočtěte, za jak dlouho se kulička ustálí na podložce. Koeficient restituce definujeme jako poměr velikostí rychlosti kuličky vzhledem k podložce po srážce a před srážkou. *Kuba si hrál s hopíkem.*

Klíčem k elegantnímu řešení této úlohy je podívat se na problém z (inerciální) vztažné soustavy spojené se zvedající se podložkou. Zde má kulička počáteční rychlost o velikosti V směrem k podložce a dopadne tedy na ni za čas

$$t_1 = \sqrt{2\frac{h}{g} + \left(\frac{V}{g}\right)^2} - V/g$$

rychlostí o velikosti

$$v_1 = V + gt_1 = \sqrt{2gh + V^2}\,.$$

Je-li koeficient restituce e, pak bude mít kulička po odrazu vzhledem k podložce rychlost o velikosti $v_2 = ev_1$ a stejnou rychlostí za čas

$$t_2 = 2\frac{v_2}{g} = 2e\frac{v_1}{g}$$

dopadne zpět na podložku, ode které se odrazí rychlostí $v_3 = ev_2$, a tak dále. Induktivně lze zřejmě psát

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} : t_n = 2e^{(n-1)}\frac{v_1}{g}\,,$$

kde t_1 je dáno tak, jak uvedeno výše. Pro $e < 1$ nám součet řady t_n konverguje a označíme-li T čas, za který se kulička ustálí na podložce, máme

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = t_1 + 2\frac{v_1}{g}\sum_{n=2}^{\infty} e^{(n-1)} = t_1 + 2\frac{v_1}{g}\sum_{n=1}^{\infty} e^n\,,$$

odkud dostaneme

$$T = t_1 + 2\frac{v_1}{g}\frac{e}{1-e} = \frac{\sqrt{2gh + V^2}}{g}\frac{1+e}{1-e} - V/g\,.$$

Číselně dostaneme $T \doteq 0{,}74\,\mathrm{s}$.

Kuba Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha FoL.27 ... P5

Kolik průměrně fotonů za sekundu dopadne do Hubblova kosmického dalekohledu od kulatého měsíce Pluta P5? Uvažujme, že měsíc má průměr $D = 20\,\mathrm{km}$, je $L = 32\,\mathrm{AU}$ daleko od Slunce a má albedo $a = 0{,}3$. Hubbleův dalekohled má průměr $d = 2\,\mathrm{m}$. Slunce považujte za monochromatický zdroj světla o vlnové délce $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$. Uvažujte solární konstantu $P_\mathrm{S} = 1\,400\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. Dále uvažujte, že dalekohled je též ve vzdálenosti L od měsíce P5. Zanedbejte absorpci světla na cestě meziplanetárním prostorem, uvažujte isotropní odraz světa od P5 a neuvažujte fotony pohlcené P5 a následně zpětně vyzářené. *Lukáš si četl o exoplanetách.*

Nejdříve určíme, jaký výkon od Slunce dopadá na měsíc

$$P_\mathrm{m} = P_\mathrm{S} \frac{1\,\mathrm{AU}^2}{L^2} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \,.$$

Výkon, který se rozptýlí, bude zmenšen o albedo. Tento výkon se rovnoměrně rozptýlí na sféru o poloměru L (ploše $4\pi L^2$), ale my detekujeme pouze část odpovídající ploše dalekohledu $S_\mathrm{d} = \pi d^2/4$. Proto pozorovaný výkon bude

$$P_\mathrm{o} = a P_\mathrm{m} \frac{\pi d^2/4}{4\pi L^2} = P_\mathrm{S} a \frac{1\,\mathrm{AU}^2}{L^2} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\pi d^2/4}{4\pi L^2} = P_\mathrm{S} a \frac{\pi}{64} \frac{1\,\mathrm{AU}^2 D^2 d^2}{L^4} \doteq 1{,}398 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{W} \,.$$

Ještě musíme určit energii fotonu. Platí $E = hc/\lambda = 3{,}638 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$. Proto za jednu sekundu dopadne $P_\mathrm{o}/E = 3{,}842\,\mathrm{Bq}$, kde Bq je becquerel jednotka rozměrově shodná s Hz, ale používaná pro náhodné, nikoli periodické procesy.

Do dalekohledu dopadne v průměru 3,8 fotonu za sekundu.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha FoL.28 ... divná gravitace

Představte si, že stojíte na vnitřní straně pláště obřího válce o poloměru podstavy $R = 1\,000\,\mathrm{m}$, který rotuje kolem své osy právě takovou konstantní úhlovou rychlostí, aby odstředivé zrychlení, které na vás působí, mělo velikost tíhového zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Tento prakticky nehmotný válec se nachází ve vakuu mimo gravitační vliv jakéhokoli tělesa. Vyhodíte-li míček od povrchu kolmo vzhůru rychlostí $v = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, určete, jak daleko od místa vrhu dopadne. Vzdálenost měříme vzhledem k rotujícímu válci po povrchu pláště. *Kuba na pouti.*

Má-li mít na vnitřní straně válce odstředivé zrychlení velikost g, pak musí být úhlová rychlost $\omega = \sqrt{g/R}$. Je dobré si uvědomit, že v nerotující inerciální vztažné soustavě nepůsobí na letící míček žádné síly a je tedy buď v klidu, nebo se rovnoměrně pohybuje po přímce. V takovéto soustavě bude trajektorie (přímka) svírat s normálou na povrch úhel α, kde

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{gR}}{v}$$

a rychlost bude mít velikost

$$v' = \sqrt{v^2 + gR} \,.$$

Přímka tedy opět protne stěnu válce v čase

$$t = \frac{2R\cos\alpha}{\sqrt{v^2 + gR}} = \frac{2Rv}{v^2 + gR}\,.$$

Za tu dobu se ale válec otočí o úhel ωt a výsledná vzdálenost od místa vrhu tedy je

$$d = R(\pi - 2\alpha - \omega t) = R\left(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{gR}}{v} - \frac{2Rv}{v^2 + gR}\sqrt{\frac{g}{R}}\right)\,.$$

Po dosazení zadaných hodnot vyjde $d \doteq 1{,}36\,\mathrm{m}$.

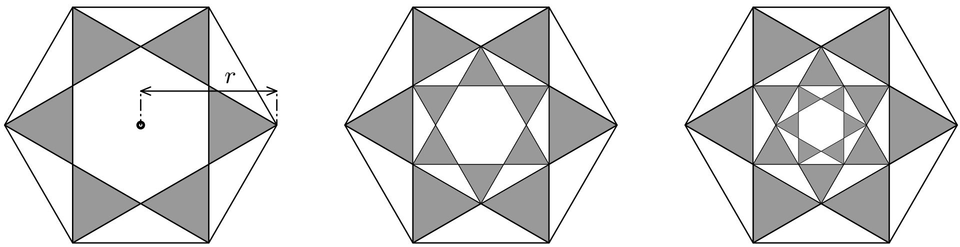
Kuba Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha FoL.29 ... gram hexagramu

Máme fraktál, který vznikne spojením nekonečněkrát do sebe vnořených šesticípých hvězd, jak můžete vidět na obrázcích. Hmotnost mají pouze vybarvené části a jeho celková hmotnost m je jeden gram přesně. Hmotné části jsou vyrobeny z homogenního materiálu. Poloměr fraktálu r je jeden centimetr (poloměrem rozumíme vzdálenost od jeho středu až ke konci jeho největšího vnějšího cípu). Jaký bude jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na obrazec procházející středem útvaru? Výsledek uveďte v jednotkách $\mathrm{g{\cdot}cm^2}$. Moment setrvačnosti rovnostranného trojúhelníku se stranou a_t a s hmotností m_t kolem osy kolmé na jeho rovinu procházející jeho těžištěm je

$$I_\mathrm{t} = \frac{1}{12} m a_\mathrm{t}^2\,.$$

Karel se před časem zamýšlel nad momentem setrvačnosti.



Obr. 5: K zadání úlohy 29

Polomer fraktálu si označme r.

Z jednoduchej geometrie sa dá zistiť, že pomer rozmerov každého vonkajšieho a doňho vnoreného šesťuholníka je $q = 1/\sqrt{3}$. Obsah vyfarbenej časti na prvom obrázku označme S_1. Obsah vyfarbenej časti, ktorá pribudla v druhom obrázku, zas S_2 a tak ďalej. Keďže obsah je úmerný druhej mocnine rozmeru, tak očividne platí:

$$S_{n+1} = q^2 S_n\,.$$

Celkový obsah je teda

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \frac{1}{1-q^2} = \frac{3}{2} S_1 \,.$$

Hrany rovnoramenných trojuholníkov v prvom obrázku majú veľkosť $a_1 = r/\sqrt{3}$. Teda celkový obsah fraktálu je

$$S = \frac{3}{2} S_1 = \frac{3}{2} \cdot 6 a_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = r^2 \frac{3\sqrt{3}}{4} \,.$$

Plošná hustota fraktálu je

$$\varrho = \frac{m}{S} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{m}{r^2} \,.$$

Moment zotrvačnosti I_1 útvaru na prvom obrázku je šesťnásobok momentu zotrvačnosti jednotlivých trojuholníkov vzhľadom na v zadaní zvolenú os. Moment zotrvačnosti jedného takého trojuholníka je podľa Šteinerovej vety

$$\frac{I_1}{6} = I_{t1} + m_{t1} \cdot l_{t1}^2 ,$$

kde I_{t1} je jeho moment zotrvačnosti okolo osi prechádzajúcej rovnobežne jeho ťažiskom, m_{t1} jeho hmotnosť a l_{t1} vzdialenosť jeho ťažiska od stredu obrázku. Keďže poznáme rozmery týchto trojuholníkov aj plošnú hustotu a $l_{t1} = 2r/3$ dostávame z jednoduchej geometrie, vypočítame moment

$$I_1 = 6 \left(I_{t1} + m_{t1} \cdot l_{t1}^2 \right) = \frac{17}{54} m r^2 \,.$$

Pri konštantnej plošnej hustote je moment zotrvačnosti úmerný štvrtej mocnine rozmeru ($I \propto mr^2$ a $m \propto r^2$), teda pre vnorené útvary platí

$$I_{n+1} = q^4 I_n \,.$$

Súčtom geometrickej rady dostávame konečný moment zotrvačnosti

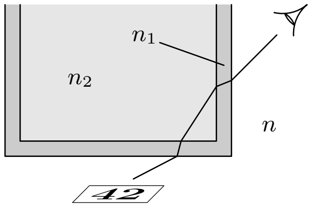
$$I = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = I_1 \frac{1}{1-q^4} = \frac{9}{8} I_1 = \frac{17}{48} m r^2 \,.$$

Číselně pak $I = 0{,}354\,\mathrm{g{\cdot}cm^2}$.

Dávid Hvizdoš
david@fykos.cz

Úloha FoL.30 ... křišťálové akvárko

Ve vzduchu je zavěšeno akvárium, o kterém můžeme předpokládat, že je nekonečně velké, takže ať jde k jeho stěně paprsek světla pod jakýmkoli úhlem, nakonec na stěnu dorazí. Akvárium má skleněné stěny o indexu lomu $n_1 > 1$ a je naplněno neznámou čirou kapalinou o indexu lomu $n_2 > 1$. Nachází se ve vzduchu o indexu lomu $n = 1$. Pod akváriem se nachází papírek s výsledkem vaší následující úlohy. Jaký nejmenší index lomu může mít kapalina, abyste výsledek neviděli zboku nádoby? (viz obrázek)? *f(Aleš) na brainstormingu vytáhl příklad ze cvika.*



Obr. 6: K zadání úlohy 30

Pro průchod několika vrstvami materiálů o různých indexech lomu platí

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 = \dots = n_N \sin \varphi_N \,. \tag{4}$$

Pro první průchod stěnou akvária tedy nebude záležet na indexu lomu skla, ale pouze na indexu lomu kapaliny, a protože $n_1 > n$, projde paprsek do akvária vždy.

Na dno akvária může obecně dorazit v intervalu úhlů $(0, \pi/2)$. Ze vztahu (4) plyne, že pokud má dojít k totálnímu odrazu, tak k němu zcela určitě dojde nejpozději na posledních rozhraních, jinými slovy, kdyby došlo k totálnímu odrazu na rozhraní kapalina–sklo nebo sklo–vzduch, dojde k němu i na rozhraní kapalina–vzduch.

Bude tedy platit

$$n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n_2 \sin\left(\varphi_2\right) \,,$$

odkud

$$n_2 = \frac{1}{\sin\left(\varphi_2\right)} \,,$$

kde φ_2 je úhel, pod kterým dorazí paprsek z kapaliny na sklo.

Ze symetrie úlohy pro průchod paprsku opačným směrem pak plyne, že $\varphi_2 = \pi/4$, a my máme podmínku

$$n_2 \geq \sqrt{2} \,,$$

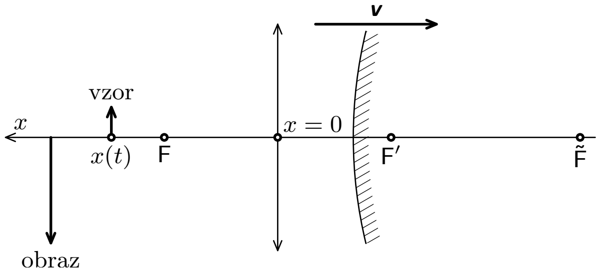
tedy $n_2 = \sqrt{2}$, což je přibližně 1,41.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha FoL.31 ... utíkající zrcadlo

Uvažujme soustavu obsahující spojku o ohniskové vzdálenosti $f = 20\,\mathrm{cm}$ a pohyblivé vypuklé zrcadlo o poloměru křivosti $3f$, viz obrázek. Se zrcadlem začneme pohybovat rychlostí $v = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ směrem od čočky, v čase $t = 0$ se zrcadlo dotýkalo čočky. Jaká musí být závislost polohy předmětu na čase, aby obraz zůstával stále ve vzdálenosti $2f$ vlevo od čočky? Předpokládejte, že pro polohu předmětu platí $x(t) = f \cdot (v^2t^2 + vft - 3f^2)/(v^2t^2 - A)$. Určete hodnotu konstanty A. Uvažujte nekonečnou rychlost světla a paraxiální aproximaci.

Lukáš seděl na optické lavici.



Obr. 7: K úloze 31

Polohu předmětu označíme x, polohu obrazu po zobrazení čočkou označíme x_c, polohu obrazu po zobrazení se zrcadlem x_cz a polohu i po posledním zobrazení čočkou x_czc. Dále označíme d vzdálenost zrcadla od čočky. Potom platí

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x_\mathrm{c}} = \frac{1}{f}\,, \tag{5}$$

$$\frac{1}{d - x_\mathrm{c}} + \frac{1}{d - x_\mathrm{cz}} = \frac{2}{r}\,, \tag{6}$$

$$\frac{1}{x_\mathrm{cz}} + \frac{1}{x_\mathrm{czc}} = \frac{1}{f}\,, \tag{7}$$

kde opačné znaménko ve druhé rovnici je z důvodu znaménkové konvence, protože kladnou vzdálenost obrazu uvažujeme pro polohy vpravo od zrcadla. Dále musíme dosadit $x_\mathrm{czc} = 2f$ a $r = -3f$ opět kvůli znaménkové konvenci. Bez těchto dvou předpokladů lze vyjádřit polohu předmětu v závislosti na poloze obrazu a vzdálenosti zrcadla od čočky velmi složitým výrazem. Pak platí

$$x = \frac{d^2 f + df^2 - 3f^3}{d^2 - \frac{5}{2}f^2}\,,$$

což po dosazení $d = vt$ dává

$$x(t) = f \cdot \frac{v^2t^2 + vft - 3f^2}{v^2t^2 - \frac{5}{2}f^2}\,,$$

z tohoto je vidět, že $A = 5f^2/2 = 0{,}1\,\mathrm{m}^2$.

Toto řešení je velmi technické a k vyřešení úlohy nebylo potřeba. Stačí určit polohu zrcadla pro jednu speciální polohu předmětu.

Speciální polohou je $x = f$. Pro $x = f$ z rovnice (5) vychází $x_\mathrm{c} = \infty$, dále ze zadání víme, $x_\mathrm{czc} = 2f$ a z rovnice (7) dostáváme $x_\mathrm{cz} = 2f$, proto pro d z rovnice (6) platí

$$\frac{1}{d - \infty} + \frac{1}{d + f} = -\frac{2}{3f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{d - 2f} = -\frac{2}{3f} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{2}f\,.$$

Tato situace nastane v čase $t = d/v = f/(2v)$. Dosadíme do předpokladu ze zadání a po vydělení f dostáváme

$$1 = \frac{v^2t^2 + vft - 3f^2}{v^2t^2 - A} \quad \Rightarrow \quad v^2t^2 - A = v^2t^2 + vft - 3f^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{5}{2}f^2 = 0{,}1\,\mathrm{m}^2\,.$$

Hodnota hledané konstanty A je $0{,}1\,\mathrm{m}^2$.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz

Úloha FoL.32 ... nabitý lupič

Lupič utíkající před policajty vážící $m = 50\,\mathrm{kg}$ se rozhodne zachránit skokem z útesu. Naštěstí před chvílí ukradl náboj o velikosti $q = 10\,\mathrm{C}$ a pod útesem je až do výšky $a = 10\,\mathrm{m}$ homogenní magnetické pole o velikosti $B = 10\,\mathrm{T}$, jehož směr je kolmý na směr pádu. Z jaké největší výšky h v metrech nad zemí může lupič skočit, aniž by dopadl na zem? Neuvažujte odpor vzduchu, tíhové zrychlení je $9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a lupičova rychlost při vletu do magnetického pole má pouze svislou komponentu. Dále uvažujte, že magnetické pole má takový směr, aby lupič nikdy nenarazil do útesu. *Napadlo Tomáše.*

Předpokládejme, že útes je vpravo. Zvolíme si pravotočivé kartézské souřadnice takové, že osa x směřuje doleva a osa y dolů. Rovina $y = 0$ odpovídá hranici, kde končí magnetické pole, které směřuje ve směru osy z. Ze vztahu pro Lorentzovu sílu dojdeme k pohybovým rovnicím

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= qB\dot{y}\,,\\
m\ddot{y} &= -qB\dot{x} + mg\,.
\end{aligned}
$$

Čas začneme měřit od okamžiku, kdy lupič vlétne do magnetického pole. Víme, že v tomto momentě je $\dot{x}(0) = 0$ a $y(0) = 0$. Tedy po zintegrování první rovnice a dosazením do rovnice druhé dostaneme

$$\ddot{y} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 y + g\,.$$

Vidíme, že svislý pohyb lupiče v magnetickém poli je popsán rovnicí lineárního harmonického oscilátoru, jehož rovnovážná poloha je posunuta o $\delta = m^2g/(q^2B^2)$. Svislou složku rychlosti lupiče v čase $t = 0$ určíme ze zákona zachování energie

$$\dot{y}(0) = \sqrt{2g(h-a)}\,.$$

Maximální výšku určíme z podmínky, že se zloděj právě dotkne země. Vyjádřeno pomocí zákona zachování energie pro harmonický oscilátor to znamená, že

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2(0) + \frac{1}{2}\frac{q^2B^2}{m}\delta^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2B^2}{m}(a-\delta)^2\,.$$

Po úpravách dostáváme

$$h = \frac{q^2B^2a^2}{2gm^2} \doteq 20{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

Jan Humplík
honza@fykos.cz

Úloha M.1 ... besipka

Dvě auta s letním a zimním obutím brzdí v létě na suché rovné silnici z rychlosti $v_0 = 100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. *Obě jedou vedle sebe a začnou brzdit ve stejný okamžik. Když auto s letními koly zastaví, druhé se „zimáky“ jede ještě rychlostí* $v_1 = 37\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ *a zastaví o 6 m dál než první auto. Jaký je poměr vodorovného zrychlení hůře brzdícího auta k zrychlení toho druhého?*

Michal slyšel v rádiu.

Zrýchlenia áut označme a_z a a_l pre zimné a letné pneumatiky. Zjavne platí

$$v_0 - a_z(v_0/a_l) = v_1\,.$$

Teda

$$(1 - a_z/a_l) = v_1/v_0\,,$$

z čoho dostávame $a_z/a_l \doteq 0{,}63$.

Michal Koutný
`michal@fykos.cz`

Úloha M.2 ... koloukotě

Kolo s osmi loukoťemi má poloměr $r = 30\,\mathrm{cm}$. *Je upevněno na pevné ose a otáčí se úhlovou rychlostí* $\omega = 2{,}5\pi\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. *Hoši střílejí z luku ve směru kola a snaží se, aby šíp volně prolétl mezerou. Délka šípu je* $l = 23\,\mathrm{cm}$. *Předpokládáme, že šíp i loukotě kola jsou zanedbatelně tenké. Určete nejmenší rychlost šípu nutnou k tomu, aby se hochům jejich záměr zdařil. Výsledek uveďte v metrech za sekundu.*

Zdeňkovi se zamotala hlava do kola.

Frekvenci vyjádříme pomocí úhlové rychlosti

$$f = \frac{\omega}{2\pi}\,.$$

Maximální čas, který má šíp k průletu kolem, než bude sražen loukotí, je osmina periody. Tu lze vyjádřit následovně

$$\frac{T}{8} = \frac{1}{8f}\,.$$

Za tento čas musí šíp celý prolétnout, tedy urazit vzdálenost rovnou své délce.

$$v = 8fl \doteq 2{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Údaj o poloměru je tedy zbytečný (což by neplatilo ve chvíli, kdy bychom přestali brát šíp a loukotě jako zanedbatelně tenké).

Zdeněk Jakub
`zdenekjakub@fykos.cz`

Úloha M.3 ... deprese na mostě

Znuděný člověk stojí na mostě ve výšce $h = 15\,\mathrm{m}$ a hází kamínky na pod ním projíždějící auta na rovné silnici. V dálce před sebou zahlédne motorkáře, jak se k němu blíží, a rozhodne se jej trefit. V mžiku odhadne jeho rychlost na $v = 72\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ a jeho vzdálenost od místa, kam kamínek upustí, na $d = 500\,\mathrm{m}$, a spočítá si, kdy má kamínek pustit a svým výpočtem se také řídí. V okamžiku dopadu kamínku je motorkář nicméně již ve vzdálenosti $x = 50\,\mathrm{m}$ za místem dopadu kamínku. O kolik kilometrů za hodinu se lišil odhad motorkářovy rychlosti od jeho skutečné rychlosti, pokud ji po celou dobu neměnil a motorkářovu vzdálenost náš človíček odhadl naprosto správně? *Kiki při procházce Brnem.*

Dlouhé zadání kompenzuje rychlé a jednoduché řešení. Čas t, kdy dopadl kamínek, lze určit jako $t = d/v$. Jestliže motorkář byl v tomto čase již ve vzdálenosti $s = d + x$, pak jeho skutečná rychlost byla $v_\mathrm{s} = s/t$. Platí tedy

$$v_\mathrm{s} = \frac{(d + x)}{d/v}\,.$$

Po dosazení ve vhodných jednotkách získáme výslednou skutečnou rychlost, kterou si převedeme zpět na km/h a určíme rozdíl obou rychlostí $\Delta v = v_\mathrm{s} - v$, který číselně vyjde $7{,}2\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha M.4 ... rozbitý výškoměr

Zvídavý pozorovatel oblohy si všimne letadla, které se přibližuje tak, že za chvíli prolétne přesně nad jeho hlavou. V jistém okamžiku, kdy se letadlo ještě stále přibližuje, pozorovatel změří, že se letadlo nachází $\alpha_1 = 1{,}3\,\mathrm{rad}$ nad obzorem. Jeho zvuk však přichází ze směru $\alpha_2 = 0{,}5\,\mathrm{rad}$ nad obzorem. Změří-li pozorovatel úhlovou rychlost letadla na obloze ve chvíli, kdy mu právě prolétá nad hlavou, spočítejte na základě těchto měření výšku h, ve které letadlo letí, víte-li, že se tato výška nemění. Rychlost zvuku je $c = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a naměřená úhlová rychlost je $\omega = 0{,}125\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Proudění vzduchu v atmosféře a změnu rychlosti zvuku s výškou neuvažujte. Cestování světla považujte za okamžité. *Kuba letěl přes půl Zeměkoule.*

Predpokladáme, že lietadlo letí rovnobežne s povrchom Zeme. Zrejme platí

$$v = \omega \cdot h,$$

kde v je rýchlosť lietadla.

Zvuk, ktorý pozorovateľ počuje pod uhlom α_2, pochádza z bodu vzdialeného

$$d = \frac{h}{\sin \alpha_2}\,.$$

Bod, ktorý pozorovateľ vidí pod uhlom α_1, je od predchádzajúceho bodu vzdialený

$$s = h\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}\right)\,.$$

Dráhu s prešlo lietadlo za rovnaký čas, za ktorý prešiel zvuk dráhu d. Teda platí

$$\frac{d}{c} = \frac{s}{v} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}\right)\,.$$

Skombinovaním predchádzajúcej rovnice s rovnicou pre d vieme vyjadriť výšku

$$h = \frac{c \sin \alpha_2}{\omega} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right) .$$

Po dosadení hodnôt dostávame $h \doteq 2\,025\,\mathrm{m}$.

Dávid Hvizdoš
`david@fykos.cz`

Úloha E.1 ... jiný laser

Barvoslepý Filip se rozhodl, že si odměří červeným He–Ne *laserem (s vlnovou délkou* $\lambda_1 = 633\,\mathrm{nm}$*) index lomu svojí skleničky vyrobené z borosilikátového skla (označení BSC7) pro tuto vlnovou délku (červenou barvu). Použil přitom metodu, kdy měřil mezní úhel lomu laserového paprsku na rozhraní sklo–vakuum a odtud vyvodil daný index lomu. Filip má však v zásuvce s lasery nepořádek, a tak omylem použil zelený laser (s vlnovou délkou* $\lambda_2 = 555\,\mathrm{nm}$*). Jaké relativní chyby (uveďte v promile) se tímto Filip dopustil při měření indexu lomu své skleničky? Uvažujte, že měření nebylo zatíženo jinými chybami jakéhokoli druhu. Pro sklo BSC7 a světlo s vlnovou délkou* $\lambda_1 = 633\,\mathrm{nm}$ *je index lomu* $n_1 = 1{,}51508$*, pro* $\lambda_2 = 555\,\mathrm{nm}$ *pak* $n_2 = 1{,}51827$.

Honzu to napadlo, když byl v laborce optiky.

Po krátkém zamyšlení je nám zřejmé, že na základě měření zadanou metodou jsme schopni přímo určit index lomu skla pro danou vlnovou délku použitého laseru, neboť $\sin\alpha_\mathrm{m} = 1/n$, kde α_m je velikost mezního úhlu a n je hledaný index lomu. Pro vyřešení tedy potřebujeme znát pouze indexy lomu pro dané vlnové délky v daném prostředí. Výsledná relativní chyba pak je

$$p = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \doteq 2{,}1\,‰\,.$$

Jan Česal

Úloha E.2 ... světluška

Doutnavka je připojena přes rezistor k tvrdému zdroji o střídavém napětí o efektivní hodnotě $230\,\mathrm{V}$ *a frekvenci* $50\,\mathrm{Hz}$*. Zápalné napětí je* $120\,\mathrm{V}$ *a zhášecí napětí je* $80\,\mathrm{V}$*. Jak dlouho bude během poloviny periody svítit? Uvažujte, že všechny odpory v obvodu jsou takové, že nemusíte uvažovat pokles proudu. Výsledek uveďte v* ms.

f(Aleš) si chtěl večer číst a neměl, čím by si posvítil.

Časový průběh napětí bude $u(t) = U_\mathrm{m}\sin(\omega t)$. Efektivní hodnota napětí je definována jako $U_\mathrm{ef} = U_\mathrm{m}/\sqrt{2}$. Pro zápalné napětí proto bude platit

$$U_\mathrm{Z} = \sqrt{2}U_\mathrm{ef}\sin(\omega t_1)\,,$$

kde t_1 je čas rozsvícení od počátku periody, ten jsme si mohli vhodně zvolit v bodě nulového okamžitého napětí. Z rovnice si vyjádříme čas t_1

$$t_1 = \frac{\arcsin\left(\frac{U_\mathrm{Z}}{\sqrt{2}U_\mathrm{ef}}\right)}{\omega}\,.$$

Zcela analogicky vyjádříme čas t_2, kdy doutnavka zhasne

$$t_2 = \frac{\arcsin\left(\frac{U_\mathrm{H}}{\sqrt{2}U_\mathrm{ef}}\right)}{\omega}\,,$$

kde U_H je zhášecí napětí. Využijeme ještě vztahu $\omega = 2\pi f$.

Pro oba časy dostaneme dva výsledky, nás zajímá ten menší v případě času t_1 a ten větší v případě času t_2, to proto, abychom určili celou dobu, kdy bude doutnavka svítit. Výsledný čas pak bude $t = t_2 - t_1$. Číselně dostaneme

$$t_1 \doteq 1{,}20\,\mathrm{ms}\,,$$
$$t_2 \doteq 9{,}21\,\mathrm{ms}\,,$$

a tedy

$$t \doteq 8{,}01\,\mathrm{ms}\,.$$

Výsledek zaokrouhlíme na 8 ms.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha E.3 ... vypněte to!

Čtvercový výtah o hmotnosti $m = 1000\,\mathrm{kg}$ a hraně podstavy $a = 3\,\mathrm{m}$ se uprostřed velmi dlouhé čtvercové šachty o hraně $b = 4\,\mathrm{m}$ pohybuje rychlostí $v = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Protože je to ale budova experimentálních fyziků, má výtah uprostřed podlahy bodový náboj $q = 1\,\mathrm{C}$ a nejproblémovější z laboratoří zrovna vytvořila silné homogenní elektrické pole o potenciálovém rozdílu mezi stěnami výtahové šachty $U = 1000\,\mathrm{V}$. Elektrická intenzita je kolmá na směr pohybu výtahu a zároveň kolmá ke stěnám s daným potenciálovým rozdílem. Závěs je tak dlouhý, že nemusíte brát v úvahu vychylování výtahu po kružnici. Jaké nejdelší trvání v sekundách může mít toto elektrické pole, aby výtah nenarazil na stěnu výtahové šachty?

f(Aleš) měl odpoledne plné úvah o výtazích a neustále se mu do toho míchala elektřina.

Na výtah bude v elektrickém poli působit síla $F_\mathrm{e} = qE$, intenzitu elektrického pole spočítáme jako $E = U/b$. Na výtah bude tedy ve směru kolmém na směr pohybu působit zrychlení

$$a = \frac{qU}{mb}\,.$$

Výtah nesmí ve směru kolmém na směr pohybu překonat vzdálenost větší než $s = (b-a)/2$. To se mu podaří za čas

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{b-a}{2}\right)mb}{qU}} = \sqrt{\frac{(b-a)\,mb}{qU}}\,.$$

Číselně tedy máme $t = \sqrt{4}\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{s}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha E.4 ... anulátor

Mějme dva velmi dlouhé rovnoběžné vodiče vzdálené od sebe $\{a\}^{\{a\}}$ metrů a umístěné ve vakuu, kterými protéká proud opačnými směry. Vodičem č. 1 protéká proud $I_1 = 1\,\mathrm{A}$. Jak velký proud musí protékat druhým vodičem, aby ve vzdálenosti $\{b\}^{\{b\}}$ metrů od vodiče č. 1 na spojnici obou vodičů, ve směru od vodiče č. 2, bylo nulové magnetické pole, pokud vzdálenost b světlo *urazí za* 10 minut*? Vzdálenost* a *je o* 30 277 604 100 m *větší než astronomická jednotka. Platí, že* $a = \{a\}[a]$ *a že astronomická jednotka je přesně* 149 597 870 700 m.

f(Aleš) napsal sladkou tečku.

Magnetická indukce vodiče ve vzdálenosti r od něj je dána vztahem

$$B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{r}\,.$$

Požadujeme, aby platilo, že $\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = 0$, tzn.

$$\frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{I_1}{r_1} - \frac{I_2}{r_2}\right) = 0\,,$$

odtud

$$|I_2| = \left|I_1\frac{r_2}{r_1}\right|\,.$$

Uvědomme si, že $r_2 = \{a\}^{\{a\}}[\,\mathrm{m} + \{b\}^{\{b\}}\,\mathrm{m}$ a $r_1 = \{b\}^{\{b\}}\,\mathrm{m}$. Astronomická jednotka je přesně 149 597 870 700 m a rychlost světla je přesně 299 792 458 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Vzhledem k velikosti obou čísel je jejich umocnění nepočitatelné, proto raději nahlédneme, že jsou obě stejně velká a dostaneme tak

$$I_2 = 1\,\mathrm{A}\cdot\frac{k+k}{k} = 2\,\mathrm{A}\,.$$

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha X.1 ... v metru

Do metra a z metra vedou dva eskalátory jedoucí proti sobě, každý rychlostí $0{,}5\,c$, kde c je rychlost světla ve vakuu. Bob právě po jednom eskalátoru spěchá na nástupiště rychlostí $0{,}6\,c$ vůči eskalátoru, kdežto Bobek právě vystoupil z metra a dere se po druhém eskalátoru na povrch rychlostí $0{,}4\,c$ opět vůči svému eskalátoru. Jakou rychlostí v jednotkách c se pohybují vůči sobě (z pohledu králíka stojícího na nástupišti)? Předpokládejte index lomu světla $n = 1$.

Dominika jela poprvé v životě metrem.

Protože se už jedná o rychlosti blízké světlu, je očividné, že je třeba uvažovat relativistické sčítání rychlostí, aby nedošlo k překročení rychlosti světla. Využijeme vzorec pro relativistické sčítání

$$\frac{u+v_i}{1+uv_i/c^2}\,.$$

Tam dosadíme za u rychlost eskalátorů a za v_i vždy rychlost pohybu branou vůči eskalátoru jednoho z králíků. Dostaneme tak dvě rychlosti

$$v_{\mathrm{Bob}} \doteq 0{,}85\,c\,,$$
$$v_{\mathrm{Bobek}} \doteq 0{,}75\,c\,.$$

Velikost jejich součtu už je hledaná rychlost, kterou se vůči sobě pohybují, tedy

$$v = |v_{\mathrm{Bob}} + v_{\mathrm{Bobek}}| = \frac{u+v_1}{1+uv_1/c^2} + \frac{u+v_2}{1+uv_2/c^2} \doteq 1{,}596\,c\,.$$

Po zaokrouhlení dostaneme $1{,}60\,c$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha X.2 ... srážka

Do jádra nuklidu ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ o hmotnosti $7{,}016003\,m_u$ narazí proton o klidové energii $938\,272{,}0\,\mathrm{keV}$ s kinetickou energií $1\,\mathrm{MeV}$, to vyvolá rozpad jádra na dvě neexcitované částice α o klidové hmotnosti $3{,}727379\,\mathrm{GeV}\cdot c^{-2}$. Jakou budou mít tyto dvě částice dohromady kinetickou energii v MeV? Uvažujte $m_u = 931{,}2720\,\mathrm{MeV}\cdot c^{-2}$ a $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *I f(Aleš) hrával kuličky.*

Vyjdeme za zákona zachování energie, podle kterého platí

$$T = T_{\mathrm{p}} + (m_{\mathrm{Li}} + m_{\mathrm{p}} - 2m_\alpha)\,c^2\,,$$

kde T je hledaná kinetická energie, T_{p} je kinetická energie protonu, m_{Li} je hmotnost jádra lithia, m_{p} je hmotnost protonu a m_α je hmotnost α částice.

Vše převedeme na elektron-volty a po vyčíslení rovnice dostaneme $T \doteq 18\,\mathrm{MeV}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha X.3 ... blik

Částice má díky svému pohybu sedminásobek své klidové hmotnosti, máte možnost ji svým měřicím přístrojem sledovat na dráze dlouhé $l = 1\,\mathrm{m}$. Jak rychlý musí být váš přístroj, aby ji zaregistroval, tzn. jaký nejkratší časový úsek mu musí stačit k registraci částice? Rychlost světla je $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Výsledek uveďte v ns. *f(Aleš) píšící ve zdraví, píšící v nemoci.*

Pro energii částice bude platit

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = n m_0 c^2 \,.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = n^2 \,,$$

tedy

$$v = \sqrt{c^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{c}{n}\sqrt{n^2-1} \,.$$

Dráhu l částice proletí za čas τ daný jako

$$\tau = \frac{l}{v}$$

$$\tau = \frac{l}{\frac{c}{n}\sqrt{n^2-1}} \,.$$

Číselně dostaneme $\tau \doteq 3{,}37021 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}$, což zaokrouhlíme na $\tau \doteq 3{,}4\,\mathrm{ns}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha X.4 ... už to praská

Neznámý vzorek horniny obsahuje $2\,\%$ thoria, to obsahuje $0{,}05\,\%$ radionuklidu ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$. Hmotnost vzorku je $100\,\mathrm{g}$. Jaká bude aktivita tohoto vzorku, pokud je poločas rozpadu thoria $1{,}4\cdot 10^{10}$ let? Předpokládejte, že se nic dalšího kromě výše zmíněného thoria nerozpadá.
f(Aleš) si vzpomněl na nakládání věcí na soustředění.

Označme $a = 2\,\%$, $b = 0{,}05\,\%$ a $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$. Relativní atomová hmotnost thoria je $A_\mathrm{r} \doteq 232$. Aktivita je určena vztahem

$$A(t) = \lambda N(t) \,,$$

kde λ je rozpadová konstanta definovaná jako $\lambda = \ln 2/T$ a N je počet rozpadových jader, těmi jsou jádra příslušného thoria ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$, jejich počet zjistíme z poměru hmotnosti radioaktivního thoria ve vzorku ku hmotnosti jednoho atomu ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$.

$$N = \frac{abm}{A_\mathrm{r} m_u} \,,$$

kde A_r je relativní atomová hmotnost thoria a m_u je atomová hmotnostní konstanta, číselně

$$N = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}1}{232 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}} \doteq 2{,}60 \cdot 10^{18}$$

a tedy pokud vezmeme v úvahu, že rok má $3{,}16 \cdot 10^7$ s, máme

$$A = \frac{\ln 2}{T} \cdot N = \frac{\ln 2}{1{,}4 \cdot 10^{10} \cdot 3{,}16 \cdot 10^7\,\mathrm{s}} \cdot \frac{0{,}02 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1}{232 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}} \doteq 4{,}07\,\mathrm{Bq}\,.$$

Aktivita tedy je asi 4,1 Bq.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.