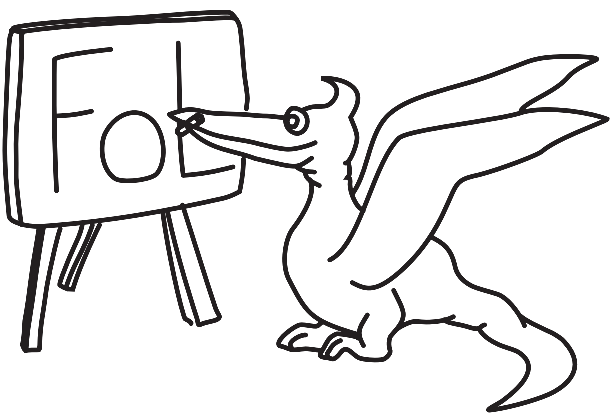
# *Řešení úloh 3. ročníku Fyziklání online*



## Úloha FoL.1 ... skákal pes

*Prchající kriminálník potřeboval přeskočit ze střechy domu na jinou střechu, jak už se to prchajícím kriminálníkům stává. Budova, ze které skákal, má výšku $H = 16\,\mathrm{m}$ a druhá budova má výšku $h = 11{,}6\,\mathrm{m}$, budovy jsou od sebe vzdálené $d = 4\,\mathrm{m}$. Kriminálník má při odrazu rychlost $v = 3{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a skáče rovnoběžně se zemí. Určete, jaká vzdálenost $\Delta$ mu bude přebývat/chybět (použijte znaménka +/−) při vztažení k okraji střechy druhé budovy. Odpor vzduchu zanedbejte. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.*

*Kiki pila další čaj a přitom vybírala úlohu z HRW.*

Dobu kriminálníkova letu určíme jako $t = \sqrt{2\Delta h/g}$, kde $\Delta h$ je rozdílem výšek obou budov. Se znalostí této doby je možné určit vzdálenost $x = vt\cos\alpha$, kterou kriminálník překoná v horizontálním směru, přičemž $\alpha = 0$.

$$x = vt\cos\alpha\,,$$

$$x = v\sqrt{\frac{2\Delta h}{g}}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme $x \doteq 3{,}60\,\mathrm{m}$, z čehož plyne, že mu k doskoku bude $0{,}40\,\mathrm{m}$ chybět, takže výsledek vyjádříme ve tvaru $\Delta \doteq -0{,}40\,\mathrm{m}$.

***Kristína Nešporová***
`kiki@fykos.cz`

## Úloha FoL.2 ... zdroj záření

*Vypočtěte vlnovou délku záření procházejícího optickou mřížkou, jestliže vzdálenost optické mřížky od stínítka je $2{,}0\,\mathrm{m}$, vzdálenost mezi 0. a 2. maximem interferenčního obrazce je $6{,}0\,\mathrm{cm}$ a perioda optické mřížky je $5{,}0\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Výsledek uveďte v nanometrech.*

*Monika nevěřila svým očím.*

Difrakce na optické mřížce je popsána vztahem

$$\sin\alpha = \frac{k\lambda}{a}\,,$$

kde $\alpha$ označuje úhel dopadu paprsku na stínítko měřený od kolmice, $k$ je řád maxima (zde $k = 2$), $\lambda$ je vlnová délka použitého záření a $a$ je perioda mřížky. Označíme-li dále vzdálenost mřížky od stínítka $l$ a vzdálenost 0. a 2. maxima $b$, můžeme pro $b \ll l$ psát $\sin\alpha \approx b/l$. Nyní jsme již schopni pomocí zadaných hodnot vyjádřit vlnovou délku

$$\lambda \approx \frac{ab}{kl} = 75\,\mathrm{nm}\,.$$

Záření s vlnovou délkou $\lambda \doteq 75\,\mathrm{nm}$ spadá do oblasti dalekého UV záření.

***Monika Ambrožová***
`monika@fykos.cz`

## Úloha FoL.3 ... fluktuační

*Kvantová elektrodynamika, která spojuje kvantovou teorii s teorií relativity, přinesla revoluci v pojetí vakua. To už není spojováno s představou prázdna a nicoty. Jedná se pouze o stav s nejmenší možnou energií. Tato nejmenší možná energie není vzhledem k principu neurčitosti nulová – s tím souvisí pojem fluktuace vakua. Nejvýraznější mechanický projev kvantových fluktuací představuje síla, jíž jsou přitahována dvě zrcadla (rovnoběžné nenabité kovové desky) oddělená úzkou mezerou. Zatímco v okolním prázdném prostoru existují vlny všech frekvencí, uvnitř dutiny mezi zrcadly existují jen takové vlny, jejichž vlnové délky odpovídají rezonancím v dutině. Důsledkem je velmi malá, ale měřitelná síla, která desky tlačí k sobě. Její velikost závisí na povrchu desek $S$ (zde je přirozené předpokládat lineární závislost), jejich vzdálenosti $d$, ve vztahu vystupují dvě fundamentální konstanty $c$ a $h$:*

$$F = Kc^{\alpha}h^{\beta}d^{\gamma}S\,.$$

*Pomocí rozměrové analýzy určete koeficienty $\alpha$, $\beta$ a $\gamma$ a spočtěte velikost síly pro $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ a $d = 1\,\mathrm{\mu m}$. $K$ je bezrozměrná konstanta, z přesného výpočtu pak vychází její velikost $K = \pi/480$.*

*Zdeněk procházel staré úlohy ze cvik a nestačil se divit.*

Z rozměrové analýzy plyne rovnice

$$\mathrm{kg}^1\mathrm{m}^1\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{m}^{\alpha+2\beta+\gamma+2}\mathrm{s}^{-\alpha-\beta}\mathrm{kg}^{\beta}.$$

Porovnáním koeficientů poté získáme $\alpha = 1$, $\beta = 1$ a $\gamma = -4$. Vztah pro velikost síly působící mezi deskami je potom

$$F = \frac{\pi hcS}{480d^4}\,.$$

Po dosazení zadaných hodnot vychází $F \doteq 1{,}3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$. Popsaný jev nazýváme Casimirovou silou.

***Zdeněk Jakub***
`zdenekjakub@fykos.cz`

## Úloha FoL.4 ... ČEZ

*Kolikrát bychom znásobili hodnotu 500 € bankovky, pokud bychom celou její hmotnost přeměnili na energii? Bankovka váží 1,1 g a 1 kWh elektrické energie dokážete prodat za 20 eurocentů.*

*Objevte skutečnou hodnotu peněz.*

Z bankovky získame energiu podľa vzťahu $mc^2$, čo predstavuje asi 27,5 GWh. Prenásobením cenou jednej kWh a vydelením nominálnou hodnotou bankovky dostávame 11 000násobok pôvodnej hodnoty.

***Ján Pulmann***
`janci@fykos.cz`

## Úloha FoL.5 ... podzimní

*Jakou ustálenou rychlostí bude padat list, bude-li mít dostatečně dlouhou dobu na ustanovení rovnováhy? Předpokládejte, že list má gramáž jako běžný kancelářský papír ($80\,\mathrm{g{\cdot}m^{-2}}$) a má tvar půlkulové plochy. Uvažujte Newtonův vztah pro odpor při hustotě vzduchu $\varrho = 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*

*a součiniteli odporu $C = 0{,}33$. Uvažujte tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.*

*Kdo se leká padajícího listu, nemá čisté svědomí.*

Z rovnosti Newtonovy odporové a tíhové síly $C\varrho Sv^2/2 = mg$ a ze skutečnosti, že hmotnost listu se znalostí gramáže $\sigma$ spočteme jako $m = \sigma S$, dostáváme rovnovážnou rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2\sigma g}{C\varrho}} = 1{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

***Tereza Steinhartová***
terkas@fykos.cz

## Úloha FoL.6 ... vláček motoráček

*Vláček Dennis se rozhodl projíždět stále dokola jednou zatáčkou tak dlouho, dokud nevykolejí. Poloměr zatáčky je $R = 190\,\mathrm{m}$, náklon tratě $\alpha = 5^\circ$, rozchod kolejí $d = 1{,}4\,\mathrm{m}$ a výška těžiště vláčku nad kolejnicemi $h = 1{,}6\,\mathrm{m}$. Jaký je rozdíl maximální a minimální velikosti rychlosti, kterou může vláček Dennis projet zatáčku bez vykolejení? Výsledek vyjádřete v jednotkách $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Tíhové zrychlení uvažujte $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Vlak jede vodorovně.*

*Jakub chce řidičák na vlaky.*

Najprv zistíme minimálnu rýchlosť, akou sa vlak môže pohybovať. Uhol medzi zvislicou vlaku a spojnicou ťažisko – koľajnice označíme $\varphi$. Z geometrie vyplýva, že uhol $\varphi$ je

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{d}{2h} \doteq 23{,}6^\circ\,,$$

čo je uhol väčší ako sklon koľajníc $\alpha = 5^\circ$. Preto minimálna rýchlosť bude nulová. Ak ide vlak nejakou rýchlosťou, pôsobí naň v ťažisku tiažová sila a odstredivá sila. Maximálna rýchlosť $v_{\mathrm{max}}$, pri ktorej sa vlak nevykoľají, nastane v prípade, keď celková sila pôsobiaca na vlak smeruje od ťažiska ku vonkajšej koľajnici. Uhol medzi tiažovou a výslednou silou je $\alpha + \varphi$. Pre pomer odstredivej a tiažovej sily potom platí vzťah

$$\frac{F_\mathrm{o}}{G} = \frac{\frac{mv^2}{R}}{mg} = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)\,,$$

odkiaľ dostávame vzťah pre maximálnu rýchlosť

$$v_{\mathrm{max}} = \sqrt{Rg\operatorname{tg}\left(\alpha + \operatorname{arctg}\frac{d}{2h}\right)} \doteq 115\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,,$$

čo je zároveň aj rozdiel maximálnej a minimálnej rýchlosti.

***Jakub Kocák***
jakub@fykos.cz

## Úloha FoL.7 ... srážka!!!

*Pozitron a alfa částice letí po přímce proti sobě, oba rychlostí $v = 2\,000\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Jaká bude jejich vzdálenost v* pm *ve chvíli, kdy se pozitron zastaví vůči laboratorní soustavě? Úlohu řešte klasicky.* *Tomáš chtěl zadat částicovou úlohu.*

Na začiatku má pozitrón hmotnosti $m_\mathrm{e}$, rýchlosť $v_{\mathrm{e},0} = v$ a jadro hélia hmotnosti $m_\mathrm{H}$, rýchlosť $v_{\mathrm{H},0} = -v$ (v opačnom smere). Nás bude zaujímať moment, keď sa pozitrón zastaví. Tento moment bude popísaný rýchlosťami pozitrónu $v_{\mathrm{e},1} = 0$ a hélia $v_{\mathrm{H},1}$. Zo zákona zachovania hybnosti dostávame rovnicu

$$m_\mathrm{e} v_{\mathrm{e},0} + m_\mathrm{H} v_{\mathrm{H},0} = m_\mathrm{e} v_{\mathrm{e},1} + m_\mathrm{H} v_{\mathrm{H},1}\,.$$

Po dosadení hodnôt dokážeme vyjadriť rýchlosť $v_{\mathrm{H},1}$ ako

$$v_{\mathrm{H},1} = v\frac{m_\mathrm{e} - m_\mathrm{H}}{m_\mathrm{H}}\,.$$

Potom pomocou zákona zachovania energie zistíme vzdialenosť častíc. Uvažujeme, že na začiatku ich potenciálna energia bola nulová, lebo boli od seba nekonečne vzdialené. Dostávame

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{e}v_{\mathrm{e},0}^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{H}v_{\mathrm{H},0}^2 = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}v_{\mathrm{e},1}^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{H}v_{\mathrm{H},1}^2 + k\,\frac{Q_1Q_2e^2}{d}\,,$$

kde $k$ je Coulombova konštanta, $Q_1$ a $Q_2$ veľkosti nábojov pozitrónu a jadra hélia v násobkoch elementárneho náboja ($Q_1 = 1$, $Q_2 = 2$), $e$ veľkosť elementárneho náboja a $d$ vzdialenosť častíc. Po dosadení známych rýchlostí dostávame vzťah

$$\frac{1}{2}(m_\mathrm{e} + m_\mathrm{H})v^2 = \frac{1}{2}v^2\frac{(m_\mathrm{H} - m_\mathrm{e})^2}{m_\mathrm{H}} + k\,\frac{Q_1Q_2e^2}{d}\,.$$

V tomto vzťahu už všetky veličiny poznáme, tak si vyjadríme hľadané $d$ a dosadíme hodnoty veličín

$$d = \frac{2k\,Q_1Q_2e^2}{v^2(3m_\mathrm{H} - m_\mathrm{e})}\frac{m_\mathrm{H}}{m_\mathrm{e}} \doteq 84{,}4\,\mathrm{pm}\,.$$

Zostáva len poznamenať, že výsledná vzdialenosť je rádovo väčšia ako rozmery jadra hélia, takže k zrážke častíc nedôjde.

***Jakub Kocák***
jakub@fykos.cz

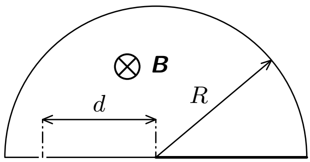
## Úloha FoL.8 ... půlkruhový analyzátor

*K analýze rychlostního rozdělení elektronů vyletujících z pracovní oblasti experimentu se používá půlkruhový analyzátor. Jde o dvě půlkruhové desky o poloměru $R = 20\,\mathrm{cm}$, mezi nimiž je magnetické pole. Jednu polovinu seříznuté hrany tvoří detektor, ve druhé je ve vzdálenosti $d = 15\,\mathrm{cm}$ od středu vstupní štěrbina, skrz kterou kolmo na hranu mohou do prostoru s magnetickým polem vstupovat elektrony. Předpokládejte, že elektrony létají nerelativistickou rychlostí. Spočtěte, jaký je poměr $\eta$ maximální a minimální rychlosti měřitelné tímto detektorem.* *Aleš sepsal první úlohu, která ho napadla.*

Částice, která vstupní štěrbinou vletí do analyzátoru, bude stáčena Lorentzovou silou a dopadne na detektor tak, že místo dopadu bude od štěrbiny vzdáleno $2r$, přičemž $r$ je tzv. Larmorův poloměr. Ten odvodíme ze znalosti působících sil na elektron – síla je pouze jedna, a to dostředivá, v tomto případě představovaná onou Lorentzovou silou, která je závislá na vstupní rychlosti elektronu $v$, jeho náboji $q$ a hmotnosti $m$ a na magnetické indukci $B$. Předpis pro sílu ($\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$) se v případě vhodně zvolených souřadnic (ve směru $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}$) zjednoduší a můžeme psát

$$\frac{mv^2}{r} = qvB\,,$$
$$r = \frac{mv}{qB}\,.$$

Pokud tento poloměr bude odpovídat polovině vzdálenosti nejbližšího bodu detektoru a štěr-




Obr. 1: Náčrtek analyzátoru

biny, získáme minimální rychlost ($v_\mathrm{min} = dqB/2m$), kterou je detektor schopen zjistit; pokud bude odpovídat nejvzdálenějšímu, získáme tu maximální ($v_\mathrm{max} = (d+R)qB/2m$). Dáme-li je do poměru, dostaneme:

$$\eta = \frac{v_\mathrm{max}}{v_\mathrm{min}} = \frac{\dfrac{(d+R)qB}{2m}}{\dfrac{dqB}{2m}} = \frac{d+R}{d}\,.$$

Dosazením číselných hodnot ze zadání získáme výsledek $\eta \doteq 2{,}33$.

***Aleš Podolník***
`ales@fykos.cz`

## Úloha FoL.9 ... upgrade

*V nedávné době CERN vylepšil svůj urychlovač. Zvětšil energii urychlených protonů z* 3,5 TeV *na* 7 TeV. *Nás však zajímá, o kolik se přitom změnila rychlost protonů. Klidová hmotnost protonu je* $938\,\mathrm{MeV}/c^2$. *Autorem úlohy je Jakub, kterého tahle otázka nějak zaujala.*

Využijeme rovnici $E = \gamma mc^2$ pro získání Lorentzova faktoru obou případů (přibližně 7463 pro 7 TeV a 3731 pro 3,5 TeV) a pak upravíme rovnici

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

na rovnici

$$v = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}c\,.$$

Pro získání rozdílu pouze odečteme obě rychlosti od sebe:

$$\Delta v = \left( \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 1}}{\gamma_1} - \frac{\sqrt{\gamma_2^2 - 1}}{\gamma_2} \right) c\,.$$

Číselně vyjde přibližně $8{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, změna v rychlosti je tedy velmi malá.

***Václav Bára***
`found@fykos.cz`

## Úloha FoL.10 ... nechť je tam rovnost

*V nádobě máme směs $m_1 = 50\,\mathrm{g}$ jódu ${}^{131}$I a $m_2 = 20\,\mathrm{g}$ stroncia ${}^{90}$Sr. Za jak dlouho bude v nádobě stejný počet atomů od každého prvku?*

*Inspirováno loňskou chemickou olympiádou.*

Polčas rozpadu jódu je $T_1 = 8{,}02\,\text{dní}$ a molekulová hmotnosť $M_1 = 131\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, pre stroncium zasa $T_2 = 28{,}8\,\text{rokov}$ a $M_2 = 90{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$. Stačí uvažovať rovnosť látkových množstiev

$$\frac{m_1}{M_1} 2^{-\frac{t}{T_1}} = \frac{m_2}{M_2} 2^{-\frac{t}{T_2}}\,,$$

resp.

$$\frac{m_1 M_2}{m_2 M_1} = 2^{\frac{t}{T_1} - \frac{t}{T_2}}$$

a z toho

$$t = \frac{T_1 T_2}{(T_2 - T_1)\ln 2} \ln \frac{m_1 M_2}{m_2 M_1} \doteq 6{,}26\,\mathrm{d}\,.$$

Všimnime si, že stroncium sa rozpadá oveľa pomalšie ako jód a látkové množstvo jódu je približne 2krát väčšie ako látkové množstvo stroncia, preto by sme mohli čakať, že výsledok bude blízky $T_1$. To môžeme využiť na rýchlu kontrolu rádovej správnosti výsledku.

***Jakub Šafin***
`xellos@fykos.cz`

## Úloha FoL.11 ... mošt

*Mějme homogenní válec s oběma podstavami o hmotnosti $M = 100\,\mathrm{g}$ a výšce $H = 20\,\mathrm{cm}$, který visí ve vzduchu tak, že jeho osa symetrie je rovnoběžná s vektorem tíhového zrychlení. Válec je na počátku plný jablečného moštu o hmotnosti $m_0 = 500\,\mathrm{g}$. Do spodní podstavy válce vyvrtáme malý otvor, kterým necháme mošt vytékat. Určete výšku hladiny, při které bude těžiště celého válce i s moštem (ve válci) v nejnižším místě. Výsledek napište v cm.*

*Domča má ráda podzimní plody a jejich kuchyňské deriváty.*

Označme polohu těžiště od středu spodní podstavy směrem nahoru $y$. Velký válec má těžiště v konstantní výšce $H/2$, nevyteklý mošt o hmotnosti $m$ s hladinou ve výšce $h$ má těžiště ve výšce $h/2$. Těžiště válce i s moštem se potom spočítá jako průměr poloh těžišť vážený hmotnostmi:

$$y = \frac{MH + mh}{2(m + M)}\,.$$

Hmotnost moštu ve válci se rovná součinu objemu a hustoty moštu $\varrho$, přičemž objem můžeme napsat jako součin plochy podstavy $S$ a aktuální výšky: $m = Sh\varrho$. Pomocí tohoto vztahu upravíme předchozí na tvar

$$y = \frac{MH + h^2 S\varrho}{2(hS\varrho + M)}\,.$$

Chtěli bychom vědět, pro jakou výšku je tento výraz minimální – zderivujme jej tedy podle $h$ a položme roven nule. Dostaneme kvadratickou rovnici pro $h$

$$h^2 S\ \varrho + 2Mh - MH = 0\,.$$

Tu vyřešíme (uvažujeme kladný kořen). Součin $S\varrho$ nahradíme $m_0/H$, jelikož známe objem moštu na začátku. Dostaneme obecný výsledek

$$y_{\min} = \frac{MH}{m_0}\left(\sqrt{1 + \frac{m_0}{M}} - 1\right)\,.$$

Po dosazení nám vyjde, že výška hladiny moštu v okamžiku, kdy bude těžiště moštu a válce nejníž, bude 5,8 cm.

Existuje také řešení nepoužívající derivace, to ponecháme čtenářům.

***Dominika Kalasová***
`dominika@fykos.cz`

## Úloha FoL.12 ... Wienův filtr

*Jako rychlostní filtr nabitých částic lze použít na sebe kolmé elektrické a magnetické pole. Uvažujme je obě homogenní a orientovaná tak, že na částici prolétávající kolmo k nim působí antiparalelními silami. Jakou rychlost musí mít nabitá částice, aby ji filtr propustil do detektoru umístěného na přímce její původní dráhy? Uvažujte velikost intenzity elektrického pole* $E = 9\cdot 10^3\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ *a velikost magnetické indukce* $B = 3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$.

*Ze života experimentálního fyzika.*

Chceme, aby částice prolétla rovně, tedy aby Lorentzova síla $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ byla nulová. Toho lze při správné orientaci polí a s uvážením toho, že částice letí v rovině kolmé na vektor magnetické indukce, vyjádřit podmínkou $v = E/B$. Pro zadané hodnoty vychází $v \doteq 3\cdot 10^5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

***Tereza Steinhartová***
`terkas@fykos.cz`

## Úloha FoL.13 ... pseudoledový čaj

*Kiki dostala chuť na ledový čaj. Nebyla bohužel obeznámena s jeho přípravou, postupovala tedy tak, že do konvice dala* $m_v = 250\,\mathrm{g}$ *vody o teplotě* $t_v = 20\,^\circ\mathrm{C}$, *do které přidala* $m_l = 350\,\mathrm{g}$ *ledu o teplotě* $t_l = 0\,^\circ\mathrm{C}$. *Po čase (zrovna v době, kdy se v konvici ustálila tepelná rovnováha) ji napadlo, že by nebylo špatné konvici zapnout. Za jak dlouho od zapnutí se jí začne voda na čaj vařit, pokud má konvice příkon* $P = 1{,}8\,\mathrm{kW}$ *a účinnost* $80\,\%$?

*Kiki pila čaj a přemýšlela, co zadat.*

Než bude zapnuta konvice, dojde k tomu, že se voda ochladí z teploty $t_\mathrm{v}$ na teplotu $t_1$ a rozpustí se taková část ledu, aby se tepla vyrovnala. Předpokládejme, že nedojde k rozpuštění veškerého ledu. Potom ho zbude

$$m_\mathrm{l}' = m_\mathrm{l} - \frac{m_\mathrm{v} c (t_\mathrm{v} - t_1)}{l_\mathrm{l}}\,,$$

kde $t_1 = 0°\mathrm{C}$. Vychází $m_\mathrm{l}' \doteq 287\,\mathrm{g} > 0\,\mathrm{g}$, předpoklad zřejmě platí. Po zapnutí konvice se rozpustí i zbytek ledu, tudíž se z něj stane voda, kterou dohromady s původní vodou chceme ohřát z teploty $t_1 = 0°\mathrm{C}$ na teplotu $t_2 = 100\,°\mathrm{C}$. Měrné skupenské teplo tání ledu je $l_\mathrm{l} = 334\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$ a měrná tepelná kapacita vody je $c = 4{,}18\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}{\cdot}°C^{-1}}$. Platí, že $Pt\eta = Q$, kde $t$ je hledaný čas a $Q$ je teplo, které musí konvice dodat systému, aby došlo k varu. Čas tedy určíme

$$t = \frac{Q}{P\eta}\,,$$

$$t = \frac{m_\mathrm{l}' + (m_\mathrm{l} + m_\mathrm{v}) c (t_2 - t_1)}{P\eta} = \frac{m_\mathrm{l} l_\mathrm{l} - m_\mathrm{v} c (t_\mathrm{v} - t_1) + (m_\mathrm{l} + m_\mathrm{v}) c (t_2 - t_1)}{P\eta}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme $t \doteq 241\,\mathrm{s}$ ($t \doteq 4\,\mathrm{min}\,1\,\mathrm{s}$).

***Kristína Nešporová***
kiki@fykos.cz

## Úloha FoL.14 ... šplhoun aceton

*Do jaké výšky vystoupí hladina acetonu v kapiláře při teplotě* $20\,°\mathrm{C}$*, pokud průměr kapiláry je* $0{,}6\,\mathrm{mm}$ *a pokud povrchové napětí acetonu činí* $0{,}023\,4\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$*? Výsledek zadejte v centimetrech.*

*Kiki se inspirovala cvikem z fyzikální chemie.*

Elevační síla povrchového napětí $F = \sigma l$, kde $\sigma$ je povrchové napětí a $l$ je délka okraje povrchu, je v rovnováze s tíhovou silou $F_\mathrm{g} = mg$, kde $m$ je hmotnost sloupce kapaliny. Délku $l$ lze rozepsat jako $l = 2\pi r$, kde $r$ je poloměr kapiláry, a hmotnost $m$ si lze vyjádřit jako $m = \varrho V = \varrho \pi r^2 h$, kde $\varrho$ je hustota acetonu a $h$ je hledaná výška sloupce acetonu. Z rovnováhy sil tedy plyne

$$h = \frac{2\sigma}{r\varrho g}\,.$$

Číselně vyjde $h = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, přičemž hustota acetonu při dané teplotě je přibližně $\varrho = 790\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

***Kristína Nešporová***
kiki@fykos.cz

## Úloha FoL.15 ... kulatá

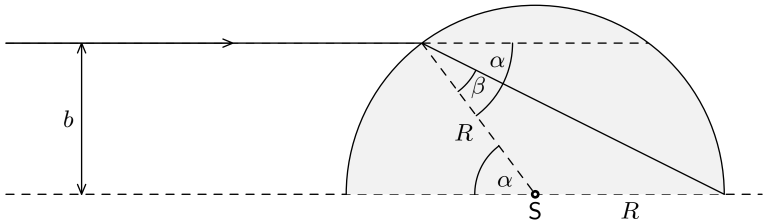
*Jaký index lomu musí mít kulička, aby soustředila rovnoběžný svazek dopadající kolmo její povrch na svou zadní stěnu? Uvažujte paraxiální aproximaci. Výsledek uveďte v násobcích indexu lomu okolí.*

*Zdeněk našel v šuplíku záhadnou kuličku neznámého původu.*

Nakresleme si průchod paprsku kuličkou a délky a úhly označme jako na obrázku. Z rovnoramenného trojúhelníku s rameny $R$ snadno určíme

$$\alpha = 180° - (180° - 2\beta) = 2\beta\,.$$

V paraxiální aproximaci $b \ll R$ platí Snellův zákon ve tvaru $n_1\alpha = n_2\beta$, kde $n_1$ je index lomu okolního prostředí a $n_2$ index lomu kuličky. Po dosazení za $\alpha$ dostaneme $n_2 = 2n_1$, index lomu kuličky tedy musí být dvojnásobkem indexu lomu okolí.




Obr. 2: Lom světla v kuličce

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha FoL.16 ... žárovka a kondenzátor

*Když byl Oliver v New Yorku, koupil si žárovku GE 31546 60A1 P VRS ES 110 120V BE. Po příjezdu do ČR mu ji bylo líto vyhodit, a tak aby mohla stále svítit, zapojil ji do série s ideálním kondenzátorem. Zanedbejte vnitřní odpor zdroje (zásuvky) a určete kapacitu kondenzátoru, kterou musí kondenzátor mít, aby na žárovce bylo odpovídající napětí. Vězte, že elektrické sítě v Evropě pracují na frekvenci* 50 Hz *a že fázové napětí v českých domácnostech je* 230 V. *Výsledek uveďte v* μF. *Jimmyho inspiroval kamarád, který si koupil špatnou žárovku.*

Jelikož jsou prvky zapojené v sérii, budeme vycházet z úvahy, že žárovkou i kondenzátorem musí projít za jednotku času stejný náboj, tedy proudy odebírané spotřebiči jsou si rovny. Proud procházející kondenzátorem pak určíme dle parametrů žárovky $I = P/U_{\check{Z}} = 0{,}5\,\mathrm{A}$. Kondenzátor popíšeme pomocí

$$X_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi\nu X_{\mathrm{C}}} = \frac{I}{2\pi\nu U_{\mathrm{C}}}\,.$$

Zbývá tedy určit napětí na kondenzátoru. Víme, že v případě kondenzátoru předbíhá proud napětí a pro celkové napětí můžeme psát $U^2 = U_{\mathrm{C}}^2 + U_{\check{Z}}^2$, jelikož žárovka se chová jako odpor, kde se nic nepředbíhá. Z toho dostáváme výsledné vyjádření

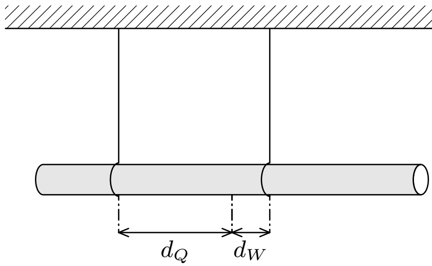
$$C = \frac{P}{2\pi\nu U_{\check{Z}}\sqrt{U^2 - U_{\check{Z}}^2}} \doteq 8{,}11\,\mathrm{\mu F}\,.$$

***Václav Bára***
found@fykos.cz

## Úloha FoL.17 ... tyčka na drátech

*Mějme tyčku o hmotnosti $m = 97\,\mathrm{kg}$, která je zavěšená na dvou ocelových lanech Q a W, která mají poloměr $r = 1{,}3\,\mathrm{mm}$ a modul pružnosti v tahu $E = 210 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$, tak, že tyčka nyní visí vodorovně, jak vidíme na obrázku. Před zavěšením byl drát Q dlouhý $l_0 = 2{,}7\,\mathrm{m}$ a o $\Delta l = 2{,}0\,\mathrm{mm}$ kratší než drát W po zavěšení. Označme, podle obrázku, vzdálenosti drátů od těžiště tyčky $d_Q$, $d_W$. Jaký je poměr délek $d_Q/d_W$? Tíhové zrychlení je $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Předpokládejte, že se poloměr drátu nemění.* *Domča si hrála s lany z konstrukčních ocelí.*

Drát Q je natahován podle Hookova zákona silou $F_\mathrm{Q} = SE\Delta l/l_0 = \pi r^2 E\Delta l/l_0$. Tato síla musí spolu se silou $F_\mathrm{W}$, kterou působí tyčka na drát W, kompenzovat tíhovou sílu $mg$, platí tedy $F_\mathrm{W} = mg - F_\mathrm{Q}$.




Obr. 3: Zavěšená tyč

Aby byla tyč v klidu a neotáčela se, musí být splněna rovnováha momentů sil – počítejme, jak napovídá zadání, vzhledem k těžišti:

$$F_\mathrm{Q} \cdot d_\mathrm{Q} = F_\mathrm{W} \cdot d_\mathrm{W}\,.$$

Nyní můžeme snadno vyjádřit hledaný poměr

$$\frac{d_\mathrm{Q}}{d_\mathrm{W}} = \frac{F_\mathrm{W}}{F_\mathrm{Q}} = \frac{mg - \pi r^2 E\Delta l/l_0}{\pi r^2 E\Delta l/l_0}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot zjistíme, že zadané délky jsou v poměru 0,17.

***Dominika Kalasová***
`dominika@fykos.cz`

## Úloha FoL.18 ... totem

*Z Plitvického jezera v místě, kde je hloubka $2\,\mathrm{m}$, svisle vyčnívá jeden metr nad hladinu totem. Svítí na něj zapadající Slunce, které je $30^\circ$ nad obzorem. Jak dlouhý stín (v m) vrhá totem na dno jezera?* *Dominika koukala na Mayovky.*

Označme si $s_\mathrm{h}$ délku stínu, který vrhá totem na hladinu, a $s_\mathrm{d}$ délku stínu vrženého na dno, index lomu vody $n = 1{,}33$ a vzduchu $n' = 1$. Světlo na vodu dopadá pod úhlem $60^\circ$ ke kolmici a vytváří tak stín délky $s_\mathrm{h} = (1\,\mathrm{m})/(\mathrm{tg}\,30^\circ)$. Potom se světlo láme podle Snellova zákona

$$n' \sin 60^\circ = n \sin\alpha\,,$$

kde $\alpha$ je úhel lomu paprsků do vody. Stín na dně $s_\mathrm{d}$ bude o tyto paprsky delší, takže

$$s_\mathrm{d} = s_\mathrm{h} + 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{tg}\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin 60^\circ\right)\right) \doteq 3{,}45\,\mathrm{m}\,.$$

***Dominika Kalasová***
`dominika@fykos.cz`

## Úloha FoL.19 ... solární mánie

*Zeměplocha je osvětlena pod úhlem* $39^\circ$ *nad horizontem a osvětlení má hodnotu* $E_1 = 80\cdot 10^3$ lx. *Jaké bude osvětlení, pokud bude Slunce* $30^\circ$ *nad obzorem?* *f(Aleš) měl málo světla.*

Pro osvětlení platí vztah

$$E = \frac{I}{h^2}\cos\alpha = \frac{I}{h^2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\,,$$

kde $\alpha$ je úhel od kolmice dopadu a $\beta$ je úhel od horizontu. Pro poměr obou osvětlení pak máme

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{I}{h^2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right)}{\frac{I}{h^2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}\,.$$

Odtud vyjádříme

$$E_2 = E_1\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}\,.$$

Číselně pak máme $E_2 \doteq 63\,600\,\mathrm{lx}$.

***Aleš Flandera***
`flandera.ales@fykos.cz`

## Úloha FoL.20 ... rozpadovka

*Mějme* 20,0 g *neznámého radioaktivního prvku s* 232 *nukleony. Za jednu minutu v něm proběhne* $2{,}12\cdot 10^{11}$ *přeměn. Spočítejte poločas rozpadu v sekundách. Rozpadový produkt je stabilní.* *f(Aleš) se byl pobavit na přednášce jaderné fyziky.*

Pro počet částic platí vztah

$$N_0 = \frac{m}{Am_\mathrm{u}}\,,$$

kde $A$ je nukleonové číslo, $m_\mathrm{u}$ je atomová hmotnostní jednotka a $m$ je hmotnost radioaktivního materiálu. Počet radioaktivních přeměn je dán jako

$$N' = N_0\lambda t\,,$$

kde $t$ je čas a $\lambda$ je rozpadová konstanta. Tu vyjádříme z předcházejících rovnic

$$\lambda = \frac{N' A m_\mathrm{u}}{mt}\,.$$

Pro poločas rozpadu $T$ lze odvodit

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}\,.$$

Po dosazení

$$T = \frac{mt\ln 2}{N'Am_\mathrm{u}}\,.$$

S číselnými hodnotami ze zadání, kde bylo vzato $m_\mathrm{u} \doteq 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, máme poločas rozpadu $T \doteq 1{,}02 \cdot 10^{13}\,\mathrm{s}$.

***Aleš Flandera***
`flandera.ales@fykos.cz`

## Úloha FoL.21 ... tepelná koule

*Obyčejná žárovka, jak je známo, produkuje podstatně více infračerveného než viditelného záření. Představme si, že nám nefunguje topení a chceme si pomocí žárovky ohřát prokřehlé ruce z teploty $T_1 = 15\,°\mathrm{C}$ na teplotu $T_2 = 35\,°\mathrm{C}$. Žárovku zcela obejmeme dlaněmi tak, že využijeme veškeré tepelné účinky záření vycházejícího z rozžhaveného wolframového vlákna. Vypočítejte, za jak dlouho se ruce zahřejí, jestliže teplota wolframového vlákna je $T_\mathrm{W} = 3\,000\,\mathrm{K}$ a má délku $l = 10^{-1}\,\mathrm{m}$ a průměr $d = 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Hmotnost lidských rukou a tepelnou kapacitu odhadneme hodnotami $m = 1\,\mathrm{kg}$, $c = 3\,000\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}}$.* *Mirkovi na koleji stávkovalo topení.*

Teplo potřebné na rozehřátí rukou je dáno kalorimetrickou rovnicí $Q = mc(T_2 - T_1)$. Ze Stefan-Boltzmannova zákona máme pro výkon žárovky $P = \sigma\pi dlT_\mathrm{W}^4$. Čas je potom dán podílem

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{mc(T_2 - T_1)}{\sigma\pi dlT_\mathrm{W}^4}\,.$$

Číselným dosazením zjistíme, že se ruce ohřejí za $416\,\mathrm{s} = 6\,\mathrm{min}\,56\,\mathrm{s}$. Žárovku lze zjevně dobře použít jako malý přímotop.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha FoL.22 ... analogový hustoměr

*V akváriu naplněném do výšky $h = 30\,\mathrm{cm}$ se u dna drží chladnější voda, neboť má vyšší hustotu. Víme, že hustota vody v akváriu roste lineárně s hloubkou – na hladině má hustota hodnotu $\varrho_u = 996\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, hustotu $\varrho_d$ u dna neznáme. Určete ji na základě skutečnosti, že se homogenní špejle o hustotě $\varrho_s = 997\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a délce $h$ ponořená do vody a upevněná v jednom krajním bodě na povrchu hladiny odchýlí od svislého směru o $\varphi = 60°$.*

*Mirek vymýšlel alternativní měřicí přístroje.*

Hustota v hloubce $x$ je určena vztahem

$$\varrho(x) = \varrho_\mathrm{u} + \frac{x}{h}\left(\varrho_\mathrm{d} - \varrho_\mathrm{u}\right).$$

Aby byla špejle v rovnováze, musí být celkový moment sil na ni působících nulový, tj.

$$\int \mathrm{d}M = 0\,.$$

Element momentu síly vyjádříme jako $\mathrm{d}M = x(\mathrm{d}F_{\mathrm{vz}} - \mathrm{d}F_{\mathrm{g}})$ a elementy sil jsou určeny vztahy

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{vz}} = \frac{mg\varrho(x)}{\varrho_{\mathrm{s}}h}\mathrm{d}x\,,$$
$$\mathrm{d}F_{\mathrm{g}} = \frac{mg}{h}\mathrm{d}x\,,$$

kde $m$ je hmotnost špejle. Dosadíme do integrálu a integrujeme v mezích od 0 do $h\cos\varphi$ (osa $x$ míří směrem dolů, $h\cos\varphi$ je poloha nejnižšího bodu špejle)

$$\int_0^{h\cos\varphi} x\left(\frac{mg}{\varrho_{\mathrm{s}}l}\left(\varrho_{\mathrm{u}} + \frac{x}{h}(\varrho_{\mathrm{d}} - \varrho_{\mathrm{u}})\right) - \frac{mg}{l}\right)\mathrm{d}x = 0\,,$$
$$\frac{\varrho_{\mathrm{u}}}{2\varrho_{\mathrm{s}}l} + \frac{h\cos\varphi}{3\varrho_{\mathrm{s}}hl}(\varrho_{\mathrm{d}} - \varrho_{\mathrm{u}}) - \frac{1}{2l} = 0\,.$$

Zbývá vyjádřit $\varrho_{\mathrm{d}}$ a dosadit číselné hodnoty

$$\varrho_{\mathrm{d}} = \frac{3}{2\cos\varphi}(\varrho_{\mathrm{s}} - \varrho_{\mathrm{u}}) + \varrho_{\mathrm{u}} \doteq 999\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha FoL.23 ... natlakovaná krabička

*Máme $n = 1\,\mathrm{mol}$ oxidu uhličitého ($CO_2$) dobře uzavřeného v nádobce, která má objem $V = 1\,\mathrm{l}$. Nádobka je v tepelné rovnováze s pokojem o teplotě $T = 297\,\mathrm{K}$. Jak se bude lišit náš odhad tlaku v nádobce, když tlak vypočítáme na základě rovnic pro ideální plyn $p_{\mathrm{id}}$ a na základě van der Waalsovy rovnice (1) pro neideální tekutinu?*

$$\left(p_{\mathrm{Waals}} + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \tag{1}$$

*Určete $(p_{\mathrm{id}} - p_{\mathrm{Waals}})/p_{\mathrm{id}}$. Konstanty van der Waalsovy rovnice pro oxid uhličitý jsou:*

$$a = 0{,}3653\,\mathrm{Pa{\cdot}m^6{\cdot}mol^{-2}}\,,$$
$$b = 4{,}280\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3{\cdot}mol^{-1}}\,.$$

*Molární plynová konstanta je $R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$.*

*Karel chtěl zadat něco na van der Waalsův plyn.*

Z obou stavových rovnic vyjádříme příslušné tlaky

$$p_{\mathrm{id}} = \frac{nRT}{V}\,,$$
$$p_{\mathrm{Waals}} = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2a}{V^2}\,.$$

Potom již stačí pouze dosadit do poměru

$$\frac{p_{\mathrm{id}} - p_{\mathrm{Waals}}}{p_{\mathrm{id}}} = 1 - \frac{V}{V - nb} + \frac{na}{RTV} \doteq 10{,}3\,\%\,.$$

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha FoL.24 ... mistr světa ve skoku pro něco

*Maxipes Fík má na každé zadní noze pružinu o klidové délce* $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$ *a tuhosti* $k = 3\cdot 10^5\,\mathrm{kg\cdot s^{-2}}$. *Vyskočí do výšky* $h = 10\,\mathrm{m}$ *a při následném dopadu se mu pružiny zaseknou, takže zůstane kmitat na místě. Vypočtěte amplitudu netlumených kmitů, jestliže Fík váží* $m = 500\,\mathrm{kg}$. *Tíhové zrychlení uvažujte* $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. *Mirek Fíkovi záviděl jeho způsob přepravy.*

V nejvyšším bodě své trajektorie má Fík potenciální energii $E_1 = mgh$. Po dopadu se do pružin uloží potenciální energie $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}(k+k)y^2$ a Fíkovi zůstane energie $E_2 = mg(l-y)$, kde $y$ představuje maximální stlačení pružiny. Ze zákona zachování mechanické energie plyne pro $y$ kvadratická rovnice

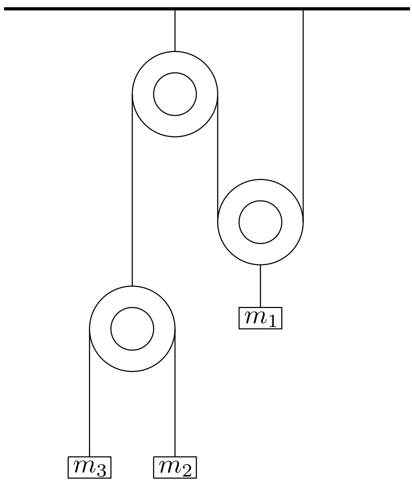
$$ky^2 - mgy - mg(h-l) = 0\,.$$

Od jejího kladného řešení $y \doteq 0{,}402\,\mathrm{m}$ musíme ještě odečíst stlačení pružiny v rovnovážné poloze $y_0 = mg/2k \doteq 0{,}008\,\mathrm{m}$, abychom získali amplitudu $y_\mathrm{a} \doteq 0{,}394\,\mathrm{m}$.

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha FoL.25 ... kladky

*Vypočítejte, s jakým zrychlením začne stoupat závaží o hmotnosti* $m_1$ *v kladkostroji na obrázku, je-li soustava na počátku v klidu. Hmotnosti závaží jsou* $m_1 = 400\,\mathrm{g}$, $m_2 = 200\,\mathrm{g}$, $m_3 = 100\,\mathrm{g}$, *tíhové zrychlení* $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. *Kladky i provázky jsou nehmotné, pohyb probíhá bez tření.* *Mirek byl fascinován jednoduchými stroji.*




Obr. 4: Kladkostroj

Tahové síly provázku působící na závaží 2, 3 označíme $T_2$ a tahové síly působící na pravou a levou kladku $T_1$. Zrychlení označme $a_1$, $a_2$, $a_3$ a zrychlení levé kladky $a_4$. Nechť směřují vektory všech zrychlení svisle dolů. Potom je soustava popsána rovnicemi

$$
\begin{aligned}
m_1a_1 &= m_1g - 2T_1\,,\\
m_2a_2 &= m_2g - T_2\,,\\
m_3a_3 &= m_3g - T_2\,,\\
T_1 &= 2T_2\,,\\
2a_1 &= -a_4\,.
\end{aligned}
$$

Označíme-li zrychlení závaží 2, 3 v soustavě levé kladky $a_2'$, $a_3'$, platí $a_2' = -a_3'$, $a_2 = a_2' + a_4$ a $a_3 = -a_2' + a_4$, z čehož dostáváme zbývající šestou rovnici

$$a_1 = -\frac{1}{4}(a_2 + a_3)\,.$$

Z posledních tří rovnic dosadíme do prvních tří, dostaneme

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}m_1(a_2 + a_3) &= m_1g - 4T_2\,,\\
m_2a_2 &= m_2g - T_2\,,\\
m_3a_3 &= m_3g - T_2
\end{aligned}
$$

a součtem druhé a třetí rovnice a porovnáním s první máme

$$\frac{16T_2}{m_1} - 4g = 2g - T_2\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)\,,$$

po úpravách

$$T_2 = 6g\frac{m_1m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 16m_2m_3}\,.$$

Do vztahů pro zrychlení $a_2 = g - T_2/m_2$, $a_3 = g - T_2/m_3$ dosadíme za $T_2$ a pomocí páté a šesté rovnice dopočteme

$$a_1 = g\frac{m_1m_2 + m_1m_3 - 8m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} = -2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha FoL.26 ... světlo v krabičce

*Jaký by musel být počet modrých fotonů (o vlnové délce $\lambda = 450\,\mathrm{nm}$) v krychlové vzduchoprázdné krabičce o vnitřní délce hrany $a = 10\,\mathrm{cm}$, aby uvnitř krabičky fotony vyvolávaly tlak $p = 1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$? Stěny jsou dokonale zrcadlové.* *Napadlo Karla na termodynamice.*

Uvažujeme stejně jako při odvozování rovnice pro tlak plynu. Na stěnu nádoby o obsahu $S$ dopadne za čas $t$ celkem $NctS/(6V)$ fotonů. $N$ je počet částic, $V$ objem krabičky, $c$ rychlost světla a 1/6 zohledňuje směr pohybu částic – pouze šestina se jich pohybuje ve směru kladné osy $x$. Při pružné srážce se stěnou se hybnost jednoho fotonu změní o $2h/\lambda$. Celková změna hybnosti fotonů, které se za čas $t$ odrazily od plochy $S$, je

$$\Delta p_\mathrm{m} = \frac{hcNtS}{3\lambda V}\,.$$

Síla je definovaná jako časová změna hybnosti a tlak jako síla působící kolmo na plochu $S$, proto

$$p = \frac{hcN}{3\lambda V}\,.$$

Hledáme počet částic, který by způsobil daný tlak, takže

$$N = \frac{3p\lambda V}{hc} \doteq 6{,}79 \cdot 10^{20}\,.$$

Při takovémto počtu částic je hustota energie záření v krabičce cca $3 \cdot 10^5\ \mathrm{J{\cdot}m^{-3}}$, což je zhruba o šest řádů více, než na povrchu Slunce.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha FoL.27 ... osvícený vozík

*Vozík o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{g}$ se může po kolejích pohybovat bez tření. Na boku vozíku se nachází svisle upevněné zrcadlo. Ze žárovky výkonu $P = 60\,\mathrm{W}$ jsme veškeré vycházející světlo koncentrovali do svazku, který kolmo dopadá na zrcadlo na vozíku. Na začátku byl vozík v klidu. Za jaký čas (v sekundách) vozík ujede vzdálenost $l = 1\,\mathrm{m}$? Předpokládejte, že se světlo zcela odráží a celý výkon žárovky se přemění na světlo.* *Jakub chtěl bezdotykový turbo pohon.*

Svetlo, ktoré sa odráža od zrkadla, má hybnosť. Pri odraze sa jeho hybnosť zmení na opačnú. Keďže platí zákon zachovania hybnosti, musel vozík získať pri odraze hybnosť. Hybnosť fotónu vlnovej dĺžky $\lambda$ je $p = h/\lambda$, kde $h$ je Planckova konštanta. Sila pôsobiaca na vozík sa vypočíta z podielu zmeny hybnosti za čas

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}\,.$$

Zmena hybnosti je dvojnásobok hybnosti fotónu, keďže fotón zmenil smer. Vzťah medzi vlnovou dĺžkou $\lambda$ a frekvenciou $f$ fotónu je $\lambda = c/f$. Po dosadení dostaneme

$$F = \frac{2hf}{c\Delta t}\,.$$

Energia fotónu $E$ je $E = hf$. Tento člen si v rovnici nahradíme

$$F = \frac{2E}{c\Delta t}\,.$$

Táto energia je energia fotónu (prípadne fotónov), ktorý sa odrazil za čas $\Delta t$, a zároveň rovnaké množstvo energie bolo žiarovkou za tento čas vytvorené. Podiel energie a času predstavuje výkon žiarovky $P$

$$F = \frac{2P}{c}\,.$$

Táto konštantná sila vyvoláva na hmotnosť $m$ konštantné zrýchlenie veľkosti

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2P}{cm}\,.$$

Za čas $t$ prejde teleso pri konštantnom zrýchlení $a$ z pokoja vzdialenosť $l = at^2/2$. Dosadením a vyjadrením času dostaneme vzťah

$$t = \sqrt{\frac{lcm}{P}} \doteq 707\,\mathrm{s}\,.$$

***Jakub Kocák***
`jakub@fykos.cz`

## Úloha FoL.28 ... Zeměválec

*Představme si, že naše planeta je nekonečný válec. Poloměr i hustota jsou zachovány, vzdálenost Měsíce také. Jakou rychlostí bude Měsíc (koule) obíhat kolem Země? Počítejte s poloměrem Země* $6\,378\,\mathrm{km}$ *a hustotou Země* $5\,515\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Dráhu Měsíce kolem Země považujte za kruhovou.*

*Tomáš Bárta si představoval alternativní vesmíry.*

Označme intenzitu gravitačního pole $\boldsymbol{K}$. Úlohu vyřešíme pro gravitační pole obdobně, jako bychom ho řešili pro elektrostatické. Gaussův zákon nám potom říká

$$\oint_S \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 4\pi GM\,.$$

Jako plochu pro integraci zvolíme válec o poloměru $r$ a délce $l$. V něm uzavřenou hmotnost vyjádříme jako $\pi R_\mathrm{Z}^2 l \varrho_\mathrm{Z}$. Výraz pak lze upravit na:

$$2\pi r l K(r) = 4\pi G \cdot \pi R_\mathrm{Z}^2 l \varrho_\mathrm{Z}\,,$$
$$K(r) = \frac{2}{r} G\pi\varrho_Z R_\mathrm{Z}^2\,.$$

Dostředivé zrychlení musí mít stejnou velikost jako intenzita

$$\frac{v^2}{r} = \frac{2}{r} G\pi\varrho_\mathrm{Z} R_\mathrm{Z}^2\,,$$
$$v = R_\mathrm{Z}\sqrt{2\pi\varrho_\mathrm{Z} G} \doteq 9\,700\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Dospěli jsme tak k zajímavému zjištění, že rychlost oběžnic kolem Zeměválce nezávisí na jejich vzdálenosti.

## Úloha FoL.29 ... hoď sem to kladivo

*Kosmonaut při vesmírné procházce kolem lodi zakopl o brašnu s nářadím a udělil jí impuls. Ta se od lodi vzdalovala po přímce až do vzdálenosti* $l = 180\,\mathrm{m}$, *kde měla vůči lodi nulovou rychlost. Za kolik dní se do tohoto místa dostala, když víme, že hmotnost brašny je* $m_1 = 50\,\mathrm{kg}$ *a hmotnost lodi* $m_2 = 500\,\mathrm{kg}$? *Gravitační vliv ostatních těles neuvažujte.*

*Lukáš si vzpomněl na brašnu z ISS.*

Brašna se bude řídit Keplerovými zákony. Přímka je pouze speciálním případem elipsy, kde numerická excentricita je rovna jedné. Vzdálenost $l$ je tedy dvojnásobek velké poloosy. Brašna vykonala půl oběhu, než se dostala od lodi do popsaného bodu (apoapsidy). Podle 3. Keplerova zákona platí

$$\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{(2t)^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2}\,,$$

$$t = \sqrt{\frac{\pi^2 l^3}{8G(m_1+m_2)}}\,.$$

Po dosazení vyjde $t \doteq 162\,\mathrm{dní}$.

***Lukáš Timko***
`lukast@fykos.cz`

## Úloha FoL.30 ... bryndavá

*Chemik měl v plánu si připravit* $100\,\mathrm{ml}$ *roztoku manganistanu draselného o koncentraci* $c_1 = 0{,}000\,5\,\mathrm{mol{\cdot}dm^{-3}}$, *takže si do odměrné baňky navážil potřebné množství manganistanu, doplnil destilovanou vodou po rysku a ideálně roztok promíchal. Poté si však do baňky nedopatřením vrazil a část roztoku se mu z ní vylila. Byl líný roztok připravovat znova, a jelikož jej nikdo neviděl, znovu doplnil baňku po rysku destilovanou vodou a tvářil se jakoby nic. Trápily ho ale výčitky svědomí, a tak odebral vzorek roztoku do kyvetky o délce* $1\,\mathrm{cm}$ *a vložil ji do spektrofotometru. Po měření zjistil, že intenzita monochromatického světla o vlnové délce* $526\,\mathrm{nm}$ *po průchodu vzorkem klesla o* $90\,\%$ *oproti původní intenzitě světla. Jaký objem roztoku si chemik vybryndal, pokud jeho měření bylo naprosto přesné? Molární absorpční koeficient manganistanu draselného pro danou vlnovou délku je* $2\,440\,\mathrm{cm^2{\cdot}mmol^{-1}}$. *Objem uveďte v mililitrech.*

*Z Kiki bude opravdu ohromný farmaceut.*

V příkladu využijeme Lambertova–Beerova zákona $A = \varepsilon c l$, kde $A$ je absorbance, pro kterou platí rovněž $A = \log\left(I_0/I\right)$, kde $I_0$ představuje intenzitu záření na počátku a $I$ intenzitu záření po průchodu vzorkem, $c$ je koncentrace roztoku, $l$ délka kyvety a $\varepsilon$ molární absorpční koeficient. Můžeme tedy vypočítat nynější koncentraci roztoku

$$c_2 = \frac{\log\frac{I_0}{I}}{\varepsilon l}\,.$$

Nyní lze spočítat, jaké množství manganistanu bylo v původním a novém roztoku podle $m = nM = cVM$, kde $M = 158\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ je molární hmotnost manganistanu draselného. Dostaneme hodnoty $m_1$ (100%) a $m_2$ ($x$%). Když vypočteme $(1 - x/100)\cdot 100\,\mathrm{ml}$, dostaneme množství vylitého roztoku v *ml* (roztok byl ideálně promíchán, proto lze využít přímé úměry), což představuje objem asi $18\,\mathrm{ml}$.

***Kristína Nešporová***
`kiki@fykos.cz`

## Úloha FoL.31 ... vážíme si rozpadů

*Izotop zlata* $^{173}$*Au se rozpadá s poločasem rozpadu* $T_{\mathrm{Au}} = 59{,}0\,\mathrm{ms}$ *vyzářením alfa částice na iridium* $^{169}$*Ir, které se dále rozpadá na* $^{165}$*Re s poločasem rozpadu* $T_{\mathrm{Ir}} = 0{,}400\,\mathrm{s}$. *Na počátku máme čistý vzorek zlata* $^{173}$*Au. V jakém okamžiku je hmotnost zlata stejná jako hmotnost* *iridia? Předpokládejte, že hmotnost atomu izotopu je přímo úměrná nukleonovému číslu.*

*Karel vymýšlel, až vymyslel.*

Vzhledem k tomu, že k řešení máme k dispozici počítač a můžeme tak využít tabulkový procesor, a vzhledem k tomu, že teorie vícenásobného rozpadu je na vysokoškolské úrovni, je i vzorové řešení vytvořené takovým způsobem, který jsme od řešitelů předpokládali, tj. numerickou simulací.

Numerická simulace byla vytvořená v programu MS Excel 2007 – lze však využít jakýkoliv jiný tabulkový editor či programovací jazyk. Simulaci najdete v souboru, který je na stránkách.

Pro výpočet byla použita Eulerova metoda, která je sice nejprimitivnější, ale na implementaci nejrychlejší. V nulovém čase máme pouze zlato $^{173}\mathrm{Au}$, které má svou maximální hmotnost označenou jako $m_{\mathrm{Au}}(0)$, v jejíchž násobcích budeme hmotnost jednotlivých látek uvádět. Na základě velikosti časového kroku, který byl nastaven na 0,01 ms a je ve sloupci A, se vypočítává hmotnostní úbytek v rámci jednoho časového kroku, který je ve sloupci D. Úbytek je vypočten ze vztahu

$$\Delta m_{\mathrm{Au}}(t+\Delta t) = m_{\mathrm{Au}}(t) - m_{\mathrm{Au}}(t+\Delta t) = m_{\mathrm{Au}}(t)\cdot\left(1-2^{-\frac{\Delta t}{T_{\mathrm{Au}}}}\right)\,.$$

Aktuální hmotnost zlata je pak rozdílem předchozí hodnoty a hmotnostního úbytku (sloupec C). Ve sloupci E je pak vypočítáno, kolik iridia nám ve vzorku přibude – jedná se o 169/173 násobek hmotnosti zlata, kterého ubylo. Tento násobek zavádíme proto, aby náš výpočet zohlednil úbytek hmotnosti v důsledku výletu jádra helia. Ve sloupci F pak nalezneme aktuální hmotnost iridia 169, která je součtem předchozí hodnoty a přírůstku a je od ní odečten úbytek. Úbytek se vypočítává v dalším sloupci G. Sloupec H je zde pak pro jednodušší vyhledání okamžiku, kdy je hmotnost iridia i zlata stejná – udává totiž poměr těchto dvou hmotností. Hledáme tedy v tomto sloupci čas, ve kterém tento poměr překročí 1, což nastalo mezi časy 0,062 64 s a 0,062 65 s.

Můžeme ovšem sáhnout i k časově náročnějšímu, ale přesnému analytickému řešení. Vycházíme z dvou obyčejných lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{Au}}}{\mathrm{d}t} = -\lambda_{\mathrm{Au}}N_{\mathrm{Au}}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{Ir}}}{\mathrm{d}t} = -\lambda_{\mathrm{Ir}}N_{\mathrm{Ir}} - \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{Au}}}{\mathrm{d}t} = -\lambda_{\mathrm{Ir}}N_{\mathrm{Ir}} + \lambda_{\mathrm{Au}}N_{\mathrm{Au}}\,,$$

kde $\lambda_{\mathrm{Au}} = \ln 2 T_{\mathrm{Au}}^{-1}$, $\lambda_{\mathrm{Ir}} = \ln 2 T_{\mathrm{Ir}}^{-1}$. Řešení první rovnice je triviální, rovnou ho proto dosadíme do druhé rovnice a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{Ir}}}{\mathrm{d}t} + \lambda_{\mathrm{Ir}}N_{\mathrm{Ir}} = \lambda_{\mathrm{Au}}N_{\mathrm{Au0}}\mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Au}}t}\,,$$

kde $N_{\mathrm{Au0}}$ je počáteční množství zlata. Novou rovnici vynásobíme výrazem $\mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{Ir}}t}$ a upravíme ji tak na tvar

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{Ir}}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{Ir}}t} + \lambda_{\mathrm{Ir}}N_{\mathrm{Ir}}\mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{Ir}}t} = \lambda_{\mathrm{Au}}N_{\mathrm{Au0}}\mathrm{e}^{(\lambda_{\mathrm{Ir}}-\lambda_{\mathrm{Au}})t}\,,$$

v němž s výhodou využijeme vlastnosti exponenciální funkce $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{Ir}}t}\right) = \lambda_{\mathrm{Ir}}\mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{Ir}}t}$, což nám spolu s Leibnizovým pravidlem dá rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(N_{\mathrm{Ir}}e^{\lambda_{\mathrm{Ir}}t}\right) = \lambda_{\mathrm{Au}}N_{\mathrm{Au0}}\mathrm{e}^{(\lambda_{\mathrm{Ir}}-\lambda_{\mathrm{Au}})t}\,,$$

kterou již snadno dokážeme integrovat. Ve zintegrované rovnici

$$N_{\mathrm{Ir}} \mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{Ir}} t} = \frac{\lambda_{\mathrm{Au}} N_{\mathrm{Au0}} \mathrm{e}^{(\lambda_{\mathrm{Ir}} - \lambda_{\mathrm{Au}})t}}{\lambda_{\mathrm{Ir}} - \lambda_{\mathrm{Au}}} + c$$

musíme vyjádřit konstantu $c$. Z podmínky $N_{\mathrm{Ir}}(0) = 0$ vyjde

$$c = -\frac{\lambda_{\mathrm{Au}} N_{\mathrm{Au0}}}{\lambda_{\mathrm{Ir}} - \lambda_{\mathrm{Au}}}\,,$$

na základě čehož jsme již schopni vyjádřit množství iridia v závislosti na čase

$$N_{\mathrm{Ir}} = \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Ir}} t} \frac{\lambda_{\mathrm{Au}} N_{\mathrm{Au0}} \left(\mathrm{e}^{(\lambda_{\mathrm{Ir}} - \lambda_{\mathrm{Au}})t} - 1\right)}{\lambda_{\mathrm{Ir}} - \lambda_{\mathrm{Au}}}\,.$$

Zadání nám ukládá určit čas, ve kterém bude platit $m_{\mathrm{Au}} = m_{\mathrm{Ir}}$, neboli

$$M_{\mathrm{Au}} N_{\mathrm{Au0}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Au}} t} = M_{\mathrm{Ir}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Ir}} t} \frac{\lambda_{\mathrm{Au}} N_{\mathrm{Au0}} \left(\mathrm{e}^{(\lambda_{\mathrm{Ir}} - \lambda_{\mathrm{Au}})t} - 1\right)}{\lambda_{\mathrm{Ir}} - \lambda_{\mathrm{Au}}}\,,$$

kde $M_{\mathrm{Au}}$, $M_{\mathrm{Ir}}$ jsou molární hmotnosti zlata a iridia. Vyjádřeno pomocí poločasů rozpadu dostáváme pro $t$ vztah

$$\frac{\ln\left(1 - \frac{M_{\mathrm{Au}}}{M_{\mathrm{Ir}}}\left(\frac{T_{\mathrm{Au}}}{T_{\mathrm{Ir}}}\right)\right)}{\frac{\ln 2}{T_{\mathrm{Au}}} - \frac{\ln 2}{T_2}}\,.$$

Po číselném dosazení vyjde $t \doteq 0{,}062\,64\,\mathrm{s}$.

Uznávali jsme odpovědi v intervalu od $0{,}062\,5\,\mathrm{s}$ po $0{,}062\,8\,\mathrm{s}$, abychom neukřivdili těm, kteří použili o něco menší časový krok pro výpočet.

***Karel Kolář*** karel@fykos.cz

***Miroslav Hanzelka*** mirek@fykos.cz

## Úloha FoL.32 ... Flash

*Komiksový hrdina Flash se po výpadu na protivníka ani nezastavuje a rovnou oběhne celou zeměkouli, aby mohl znova udeřit. Běží konstantní rychlostí $v = 0{,}8c$. Při prvním úderu mu poklesne hybnost o polovinu původní hodnoty. Nově nabytou rychlostí vykoná ještě jeden oběh a při dalším úderu opět ztratí polovinu současné hybnosti. Určete poměr energií $E_1/E_2$, které se uvolní při prvním a při druhém nárazu. Podle přesných údajů na dc.wikia.com je klidová hmotnost Flashe (v civilu Barry Allen) $m_0 = 89\,\mathrm{kg}$.* *Mirek koukal na seriály o superhrdinech.*

Při každém nárazu předá Flash okolí (tj. tělu záporáka) množství energie odpovídající ztrátě jeho vlastní kinetické energie. Celkovou energii Flashe lze při relativistických rychlostech vyjádřit pomocí tzv. Pythagorovy věty o energii $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$, kinetická energie je potom $E_{\mathrm{k}} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2$. Ztráty energie při prvním a druhém nárazu jsou

$$E_1 = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2/4}\,,$$
$$E_2 = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2/4} - \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2/16}\,.$$

Za hybnost můžeme dosadit $p = \gamma m_0 v = (m_0 vc)/\sqrt{c^2 - v^2}$ a po několikerých úpravách dojdeme k finálnímu výrazu

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{3}{4}\beta^2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\beta^2} - \sqrt{1 - \frac{15}{16}\beta^2}}\,,$$

kde $\beta = v/c$. Dosazením za $\beta = 0{,}8$ dostaneme hodnotu $E_1/E_2 \doteq \pi$.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha FoL.33 ... we need to go deeper

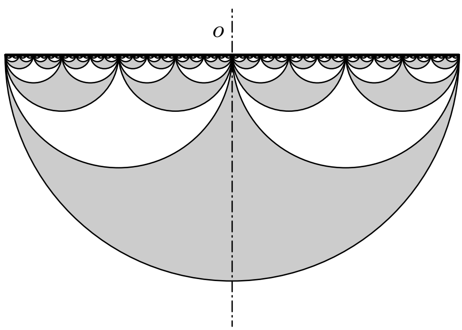
*Vypočítejte moment setrvačnosti desky, která má tvar jako na obrázku, okolo její osy symetrie o (desku tvoří pouze tmavé části). Tvar vznikne tak, že v půlkruhu vyřežeme díry půlkruhovitého tvaru s polovičním poloměrem a do těchto děr potom vložíme čtyři čtyřikrát menší půlkruhy s vyřezanými dírami, do nichž vložíme další půlkruhy s vyřezanými dírami a pokračujeme do nekonečna. Hmotnost desky je $m = 7\,\mathrm{kg}$ a poloměr největšího půlkruhu $R = 40\,\mathrm{cm}$.*

*Xellos vzpomínal na soutěže.*

Spočítajme najprv hmotnosť útvaru z obrázka v závislosti od $R$. Všimnime si, že ide len o polkruh, z ktorého sú vyrezané tie isté, len 2krát zmenšené útvary. Keďže zmenšenie sa týka len dvoch rozmerov, hmotnosť sa ním zmenší 4krát. Ak je plošná hustota dosky $\sigma$, potom je hmotnosť polkruhu s polomerom $R$ rovná $m_0 = \pi R^2 \sigma/2$; pre hmotnosť výsledného útvaru potom platí

$$m = m_0 - \frac{m}{2}\,,$$

$$m = \frac{\pi R^2 \sigma}{3}\,.$$




Obr. 5: Vyřezaná deska

Pri výpočte samotného momentu zotrvačnosti použijeme podobnú úvahu. Moment zotrvačnosti plného polkruhu s hmotnosťou $m_0$ okolo jeho osi symetrie je $I_0 = m_0 R^2/4$ a hľadaný moment si označme $I$. Ten sa pri dvojnásobnom zmenšení polomeru zmenší nie 4krát, ale až $2^4 = 16$krát, lebo ho vieme napísať v tvare $I = KmR^2$, kde $K$ je neznáma konštanta. Zo Steinerovej vety navyše platí, že moment zotrvačnosti každého vyrezaného malého útvaru okolo osi symetrie veľkého je rovný jeho momentu okolo vlastnej osi plus jeho hmotnosti krát $(R/2)^2$, teda

$$\begin{aligned} I &= I_0 - 2\left(\frac{I}{16} + \frac{m}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi R^4\sigma}{8} - \frac{I}{8} - \frac{\pi R^4\sigma}{24}\,,\\ I &= \frac{2\pi R^4\sigma}{27} = \frac{2mR^2}{9}\,. \end{aligned}$$

čo je číselne $0{,}25\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

***Jakub Šafin***
xellos@fykos.cz

## Úloha FoL.34 ... špejlička

*V misce, která má tvar polokoule s poloměrem $R = 10\,\mathrm{cm}$, leží špejle délky $2l = 30\,\mathrm{cm}$. Určete úhel $\alpha$ (ve stupních), který bude špejle svírat se svislým směrem, pro její rovnovážný stav.*
*f(Alešovi) se líbila úloha s tyčí na netu.*

Při řešení využijeme princip virtuální práce, zapsat ho můžeme jako

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0\,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{F}_i$ jsou výslednice vtištěných sil a $\delta\boldsymbol{r}_i$ jsou posunutí slučitelná s vazbami, $i$ je index hmotného bodu. V uspořádání máme jedinou vtištěnou sílu, a to je síla tíhová $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$. Ta působí jen ve svislém směru, řekněme podél osy $y$ mířící dolů. Místo jejího působení bude těžiště špejle. V rovnováze se tyč nehýbe a nepůsobí na ni žádná síla ve směru $x$, a proto stačí vyjádřit složku $y$-ovou. Vyjádříme si souřadnici těžiště v závislosti na úhlu

$$y = R\sin 2\alpha - l\cos\alpha\,.$$

Nyní spočteme virtuální posunutí

$$\delta y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}\delta\alpha = (2R\cos 2\alpha + l\sin\alpha)\,\delta\alpha\,.$$

Po dosazení do (2) máme

$$F\delta y = mg\,(2R\cos\alpha + l\sin\alpha)\,\delta\alpha = 0\,.$$

Po vyřešení máme dvě řešení, fyzikální smysl má jen to kladné, které je ve tvaru

$$\sin\alpha = \frac{l}{8R} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l^2}{16R^2} + 2}\,.$$

Číselně pak dostaneme $\alpha \doteq 67^\circ$.

***Aleš Flandera***
flandera.ales@fykos.cz

## Úloha FoL.35 ... teserakt

*Výzkumná expedice našla na dně oceánu mimozemský objekt teserakt neboli čtyřrozměrnou krychli neboli hyperkrychli. Přirozeně chtěli prozkoumat její fyzikální vlastnosti, a tak se ji rozhodli roztavit. Zjistili, že je z izotropního materiálu s velkou délkovou teplotní roztažností, která navíc s rostoucí teplotou lineárně roste. Konkrétně* $\alpha_a(T_1) = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$ *a* $\alpha_a(T_2) = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$ *pro* $T_1 = 300\,\mathrm{K}$, $T_2 = 400\,\mathrm{K}$. *Vypočítejte procentuální nárůst čtyřobjemu hyperkrychle při zahřátí z* $T_1$ *na* $T_2$*, jestliže má při teplotě* $T_1$ *délku hrany* $a = 10\,\mathrm{cm}$.

*Mirek přemýšlel nad fyzikou ve filmu Avengers.*

Délková teplotní roztažnost je definovaná vztahem

$$\alpha_a = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T}$$

a analogicky pro objemovou roztažnost

$$\alpha_V = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\,.$$

Objem krychle je $V = a^4$ a pro velmi malé teplotní rozdíly platí

$$V + \mathrm{d}V = (a + \mathrm{d}a)^4 \approx a^4 + 4a^3\mathrm{d}a = V + 4V\frac{\mathrm{d}a}{a}.$$

Dosazením $\mathrm{d}V = \alpha_V a^4 \mathrm{d}T$, $\mathrm{d}a = \alpha_a a \mathrm{d}T$ dostaneme rovnici

$$a^4 + a^4\alpha_V\mathrm{d}T = a^4 + 4a^4\alpha_a\mathrm{d}T\,,$$

takže $\alpha_V = 4\alpha_a$. Rozdíl v objemu potom získáme jednoduchou integrací,

$$\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \int_{T_1}^{T_2}\alpha_V(T)\mathrm{d}T\,,$$

$$\ln\frac{V_2}{V_1} = 2\left(T_2 - T_1\right)\left(\alpha_a(T_2) + \alpha_a(T_1)\right)\,,$$

z čehož už pouze vyjádříme hledaný procentuální nárůst

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \left(\mathrm{e}^{2(T_2 - T_1)(\alpha_a(T_2) + \alpha_a(T_1))} - 1\right)\cdot 100\,\% \doteq 64{,}9\,\%\,.$$

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha FoL.36 ... krátké ruce

*Mirek se rozhodl změřit rozměry svého pokoje, ale měl po ruce pouze dvoumetrový skládací metr. Když ho chytil každou rukou za jeden konec a rozpažil, zjistil ke svému překvapení, že ho nedokáže zcela narovnat. Určete vzdálenost nejnižšího bodu prověšeného metru od vodorovné spojnice rukou, jestliže víte, že se metr skládá že čtyř shodných částí délky* $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$ *a vzdálenost mezi jeho konci (rozpětí rukou) je* $L = 1{,}8\,\mathrm{m}$. *Překryvy ve spojích a tření zanedbejte.*

*Mirek objevil, že výška postavy a rozpětí rukou jsou si přibližně rovny.*

Vzhledem k symetrii problému nám k popisu budou stačit dvě zobecněné souřadnice $\alpha$, $\beta$ představující úhly sevřené mezi první, resp. druhou částí metru a vertikálou. Pomocí těchto souřadnic vyjádříme polohy těžišť a z nich potenciální energii

$$u(\alpha,\beta) = -2mg\frac{l\cos\alpha}{2} + 2mg\left(l\cos\alpha + \frac{l\cos\beta}{2}\right) = -mgl(3\cos\alpha + \cos\beta)\,,$$

kde jsme nulovou hladinu umístili do výšky rukou a kde $m$ označuje hmotnost jednoho dílu metru. Potenciální energii budeme chtít minimalizovat, nesmíme však zapomenout na podmínku

$$L = 2l(\sin\alpha + \sin\beta)$$

plynoucí z neměnné délky jednotlivých částí metru. Označme $f(\alpha,\beta) = 2l(\sin\alpha + \sin\beta) - L = 0$. Máme pouze jednu podmínku, zavedeme tedy jeden Lagrangeův multiplikátor $\lambda$ a sestavíme rovnice

$$\frac{\partial U}{\partial\alpha} - \lambda\frac{\partial f}{\partial\alpha} = 0\,,$$
$$\frac{\partial U}{\partial\beta} - \lambda\frac{\partial f}{\partial\beta} = 0\,.$$

Když z každé rovnice vyjádříme $\lambda$, výrazy porovnáme a rovnou zderivujeme, dostaneme jednu rovnici o dvou neznámých

$$3\,\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta\,.$$

Druhou rovnici potřebnou k určení $\alpha$, $\beta$ představuje omezující podmínka. Jedná se o transcendentní rovnice, jejichž fyzikálně přijatelným řešením je dvojice $\alpha \approx 55{,}6\,^\circ$, $\beta \approx 77{,}13\,^\circ$. Polohu nejníže položeného bodu metru vyjádříme pomocí jednoduché geometrie vztahem

$$h = l(\cos\alpha + \cos\beta)$$

a numerickým dosazením určíme, že hledaná vzdálenost je 0,394 m.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha FoL.37 ... odporný Fibonacci

*Rezistory o shodném odporu $R = 1\,\Omega$ zapojíme následovně: Nejdříve dáme dva rezistory do série a za ně dvojici paralelně zapojených rezistorů, za ně tři paralelně zapojené rezistory, dále pět, osm, třináct ... až z rezistorů vytvoříme nekonečnou Fibonacciho posloupnost. Vypočtěte odpor tohoto zapojení.* *Mirek chtěl vymyslet něco skutečně odporného.*

Označme si hodnotu $n$–tého členu Fibonacciho posloupnosti $F(n)$. Potom odpor paralelního zapojení rezistorů na odpovídající pozici bude $R/F(n)$. Podstatou úlohy je tedy vyjádřit $F(n)$.

Rekurentní vztah pro Fibonacciho posloupnost je dán diferenční rovnicí

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1\,.$$

Řešením charakteristické rovnice $t^2 = t + 1$ dostaneme dvojici řešení $\varphi_+ = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, $\varphi_- = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$, pro jejichž lineární kombinace musí vzhledem k počátečním podmínkám platit

$$c_1\varphi_+ + c_2\varphi_- = 1c_1\varphi_+^2 + c_2\varphi_-^2 = 1\,.$$

Řešením této rovnice dostaneme $c_1 = 1/\sqrt{5}$, $c_2 = -1/\sqrt{5}$, z čehož plyne

$$F_n = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{\sqrt{5}}\,.$$

Nyní potřebujeme vyčíslit sumu

$$R\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}\,.$$

Analytické řešení zatím nebylo nalezeno, uchýlíme se proto k numerickému řešení. Řada velmi rychle konverguje, zaokrouhlený výsledek je $3{,}36\,\Omega$.

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha M.1 ... jehlové podpatky

*Co vyvine větší tlak a jaké budou jeho hodnoty? Krychle z oceli o hraně* $3\,\mathrm{m}$*, nebo žena na jehlových podpatcích o průměru* $5\,\mathrm{mm}$*, která má hmotnost* $59{,}\overline{9}\,\mathrm{kg}$*? Uvažujte situaci, kdy veškerá váha spočívá pouze na jednom podpatku.* *Monika zašlápla mravence.*

Nejprve vypočteme tlak, který vyvine žena na jehlových podpatcích. Platí vztah

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{4m_1 g}{\pi d^2} \doteq 3{,}0 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa}\,,$$

kde jsme dosadili $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Pro výpočet tlaku, kterým působí na vodorovnou podložku ocelová krychle, potřebujeme znát hustotu oceli $\varrho_2$. Ocelí však existují různé druhy. Aby krychle vyvolala tlak větší než $p_1$, musí platit

$$\varrho_2 > \frac{p_1}{ag}\,,$$

kde $a$ je délka hrany krychle. Vychází $\varrho_2 > 1{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, což je o dva až tři řády více než hustota běžných kovů. Větším tlakem tedy budou působit jehlové podpatky.

***Monika Ambrožová***
monika@fykos.cz

## Úloha M.2 ... zácpa

*Uvažujte automobil popojíždějící v koloně rychlostí* $v = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*. Jak rychle se mění úhel, pod kterým se řidič dívá na dopravní návěstidlo, je-li jeho počáteční vodorovná vzdálenost od návěstidla* $x = 30\,\mathrm{m}$ *a značka se nachází ve výšce* $h = 2{,}5\,\mathrm{m}$*? Rozměry automobilu i značky zanedbejte.* *Verča pozorovala chování řidičů v koloně.*

Značka sa vzhľadom na nás pohybuje vodorovne rýchlosťou $v$. Značku vidíme pod uhlom $\varphi$, pre ktorý platí

$$\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}\,.$$

Zložka rýchlosti v tangenciálnom smere je

$$v_\mathrm{t} = v\ \sin\varphi\,.$$

Rýchlosť menenia uhla, uhlová rýchlosť, potom je

$$\omega = \frac{v_\mathrm{t}}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{v\ h}{h^2 + x^2} \doteq 5{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s^{-1}}\,.$$

***Jakub Kocák***
jakub@fykos.cz

## Úloha M.3 ... velmi pomalá relativita

*Dvě kuličky se pohybují rychlostmi* $0{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a* $0{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *stejným směrem. Před srážkou je ta pomalejší napřed, po srážce se pohybují jako jedno těleso. O kolik se při srážce ohřejí, jestliže měly před srážkou stejnou teplotu? Tepelná kapacita materiálu kuličky je* $c = 0{,}02\,\mathrm{mJ{\cdot}K^{-1}{\cdot}g^{-1}}$, *hmotnost kuliček je shodná.* *Janči zjednodušoval Lukášovu relativitu.*

Zo zákona zachovania hybnosti dostaneme výslednú rýchlosť guliek ako aritmetický priemer ich pôvodných rýchlostí. Zmena energie, ktorá pôjde do ohrievania, je

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - m\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}m(v_1 - v_2)^2\,.$$

Zmena teploty je pridaná energia delená celkovou teplotnou kapacitou

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{2mc} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{8c} \doteq 1{,}6\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

***Ján Pulmann***
`janci@fykos.cz`

## Úloha M.4 ... žbluňk

*Jak nejméně vysoko nad hladinou vody musí být dolní konec svisle orientované tyče o délce* $l = 50\,\mathrm{cm}$, *aby se po dopadu zanořila celá pod vodu? Tyč má poloviční hustotu než voda a na spodku je mírně zatížená, abychom neměli problémy se stabilitou.* *Lukáš se koupal.*

Označme si postupně $\varrho$, $S$, $l$, $x$ hustotu vody, průřez tyče, celkovou délku tyče a délku ponořené části. Pro vztlakovou sílu potom platí

$$F_{\mathrm{vz}} = \varrho S\,xg\,.$$

Práce vykonaná touto silou při zanořování tyče je potom

$$W = \varrho S\,g\int_0^l x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varrho S\,gl^2\,.$$

(Jedná se vlastně o maximální potenciální energii pružiny s tuhostí $\varrho S g$.) Zvolme nulovou hladinu potenciální energie tíhového pole tak, aby byla energie nulová právě při úplném zanoření tyče. Pak platí rovnost

$$\frac{1}{2}\varrho S\,lgh = \frac{1}{2}\varrho S\,gl^2\,,$$

kde levá strana představuje potenciální energii ve výšce $h$ vůči zanořené tyči. Zřejmě $h = l$, takže dolní konec tyče bude na začátku přesně na hladině vody.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha E.1 ... blesk

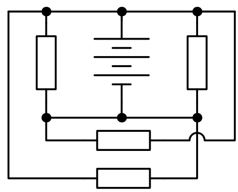
*Jančiho fotoaparát má na baterii napsány údaje* 3,6 V *a* 1 250 mAh. *Kondenzátor použitý v blesku má kapacitu* 90 µF *a je nabíjen na napětí* 180 V. *Uvažujte, že při nabíjení máme přesně poloviční ztráty energie. Kolik blesků zvládne fotoaparát s plně nabitou baterií, než se úplně vybije? Jedná se o dokonalou baterii – tedy napětí neklesá během vybíjení. Upozorňujeme, že počet blesků je celé číslo.* *Janči nerad fotí s bleskem.*

V baterke je uložených $3{,}6\,\mathrm{V}\cdot 1{,}250\,\mathrm{Ah}\cdot 3600\,\mathrm{s{\cdot}h^{-1}}$ joulov energie. Jeden blesk jej spotrebuje, pri štandardnom značení, $CU^2$. Pomer celkovej energie a energie na jeden blesk zaokrúhlený nadol na celé čísla je 5 555, po tomto množstve bleskov nám teda neostane energia na ďalšie.

***Ján Pulmann***
`janci@fykos.cz`

## Úloha E.2 ... zamotané odpory

*Jaký proud $I$ poteče zdrojem napětí $U = 1\,\mathrm{V}$, pokud má každý rezistor odpor $1\,\Omega$?*



Obr. 6: Schéma zapojení

*Janči vymýšlel bez ohledu na řešení.*

Spodné dva body, kde sa stretávajú tri vodiče, môžeme spojiť a rozmotať tak prekrížené vodiče. Po prekreslení dostaneme ku zdroju dva paralelne pripojené dvojice paralelne zapojených odporov. Celkový odpor je teda štvrtina jedného odporu a prúd je 4 A.

***Ján Pulmann***
`janci@fykos.cz`

## Úloha E.3 ... aberace

*Světlo s vlnovou délkou* 400 nm *ve vakuu má v čočce vlnovou délku* 265 nm. *Pro světlo s vlnovou délkou* 700 nm *ve vakuu je vlnová délka v čočce* 460 nm. *O kolik se posune ohnisková vzdálenost pro červené světlo, jestliže má modré světlo ohniskovou vzdálenost* 1 m*? Jde o tenkostěnnou čočku.* *Janči vzpomínal na ty části optiky, které se mu líbily.*

Vyjdeme ze zobrazovací rovnice pro tenkou čočku

$$\frac{1}{f} = \frac{n - n_0}{n}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) ,$$

v níž $n_0$ představuje index lomu okolí (pro vakuum $n_0 = 1$) a $n$ je index lomu čočky. Pro ohniskové vzdálenosti $f_\mathrm{r}$ (červené světlo), $f_\mathrm{b}$ (modré světlo) můžeme tyto rovnice vydělit a vyjádřit

$$f_\mathrm{r} = \frac{n_\mathrm{b} - 1}{n_\mathrm{r} - 1} f_\mathrm{b}\,,$$

kde příslušné indexy lomu vyjádříme z jednoduchého vztahu $\lambda = \lambda_0/n$, kde $\lambda_0$ je vlnová délka ve vakuu a $\lambda$ uvnitř čočky. Posun ohniska je

$$f_\mathrm{r} - f_\mathrm{b} = f_\mathrm{b}\left(\frac{\lambda_\mathrm{r}\left(\lambda_{\mathrm{b}0} - \lambda_\mathrm{b}\right)}{\lambda_\mathrm{b}\left(\lambda_{\mathrm{r}0} - \lambda_\mathrm{r}\right)} - 1\right) \doteq 0{,}024\,\mathrm{m}\,.$$

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha E.4 ... práce na nic

*Deskový kondenzátor je nabitý na napětí* $1\,\mathrm{V}$*, kolmo na elektrické pole mezi deskami o vzdálenosti* $d = 0{,}1\,\mathrm{mm}$ *je magnetická indukce o velikosti* $2\,\mathrm{\mu T}$*. Z desky s nižším potenciálem vylétá elektron s nulovou počáteční rychlostí. Vypočtěte velikost rychlosti, s jakou dorazí na druhou desku.* *Xellos rád zavádza.*

Jelikož magnetické pole nekoná práci, elektron získá kinetickou energii $E = 1\,\mathrm{eV}$. To v řeči rychlostí znamená

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_\mathrm{e}}} \doteq 593\,000\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

***Ján Pulmann***
`janci@fykos.cz`

## Úloha X.1 ... roztáhneme se

*Železo přejde při teplotě $T$ z kubické prostorově centrované fáze do plošně centrované. Hrany krystalků se prodlouží o 22 %. Kolikrát se zmenší hustota tohoto krystalu?*

*Tomáš Bárta přemýšlel o železe.*

V prostorově centrované fázi připadají na jednu buňku 2 atomy. V plošně centrované 4 atomy. Hmotnost tedy bude 2krát větší a objem bude $1{,}22^3$krát větší než původně. Hustota tedy bude $2/1{,}22 \cdot 10^3 \doteq 1{,}10$krát menší.

***Aleš Flandera***
`flandera.ales@fykos.cz`

## Úloha X.2 ... topná sezóna

*Kolikrát bychom museli pustit hopík o hmotnosti $m = 200\,\mathrm{g}$ z výšky $h = 1\,\mathrm{m}$ na podlahu z polyvinylchloridu o hustotě $\varrho = 1380\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a měrné tepelné kapacitě $c = 0{,}9\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, aby se jeho dobře tepelně izolovaný kousek o ploše $S = 1\,\mathrm{m^2}$ a tloušťce $d = 1\,\mathrm{cm}$ ohřál o jeden stupeň Celsia? Koeficient restituce $k$ mezi hopíkem a PVC, definovaný jako poměr rychlosti hopíku těsně po odrazu a těsně před odrazem, budiž 70 %. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.*

*Terku při vymýšlení úloh zábly nohy a přemýšlela o alternativních způsobech vytápění.*

Před odrazem má hopík energii $mgh$, po odrazu $mghk^2$, velikost odevzdaného tepla je pak $mgh(1-k^2)$. Označíme-li hledaný počet odrazů $N$, platí rovnost

$$Nmgh(1-k^2) = c\varrho S\,d\Delta T\,,$$

$$N = \frac{c\varrho S\,d\Delta T}{mgh(1-k^2)} \doteq 12\,413\,,$$

kde byla číselná hodnota $N$ zaokrouhlena nahoru na celé číslo.

***Tereza Steinhartová***
`terkas@fykos.cz`

## Úloha X.3 ... šestiúhelníková koule

*Alfa fáze nitridu boru je tvořena rovinami atomů uspořádaných do šestiúhelníků. Podařilo se nám dostat se ke kouli z tohoto materiálu s poloměrem $r = 1\,\mathrm{\mu m}$. Kolik nejvíce takovýchto atomových rovin může protnout přímka protínající kouli? Potřebné informace o struktuře si dohledejte.*

*Xellos vzpomínal na chemii.*

Webová stránka `http://www.ioffe.rssi.ru/SVA/NSM/Semicond/BN/basic.html` hovorí o vzdialenosti rovín $c = 6{,}66\,\mathrm{\AA}$. Najviac ich pretne priamka idúca priemerom, a to

$$N = \frac{2r}{c} \doteq 3\,000\,.$$

***Ján Pulmann***
`janci@fykos.cz`

## Úloha X.4 ... pevná či odpružená

*Písty vzduchové vidlice jízdního kola mají průřez $S = 5\,\mathrm{cm}^2$ a výšku $h = 20\,\mathrm{cm}$. K vidlici je připojen manometr, který ukazuje tlak $p_1 = 100\,\mathrm{psi}$. O kolik cm poklesne zdvih vidlice, jestliže se o ni celou vahou opře člověk o hmotnosti $m = 60\,\mathrm{kg}$? Uvažujte ideální dvouatomový plyn a adiabatický děj. Nezapomeňte, že vidlice má dvě nohy.*

*Mirek se údržbě kola dlouhodobě vyhýbá.*

Vyjdeme ze vztahu pro adiabatický děj v ideálním plynu

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa\,,$$

kde $\kappa$ je Poissonova konstanta. Na začátku máme objem $V_1 = Sh$, po stlačení $V_2 = S(h - \Delta h)$, kde $\Delta h$ je hledaný pokles zdvihu. Pro tlaky platí vztah

$$p_2 = p_1 + \frac{mg}{2S}\,,$$

kde dvojka ve jmenovateli zohledňuje rozložení síly na obě nohy. Dosazením vztahů pro $p_2$, $V_1$, $V_2$ a umocněním na $1/\kappa$ dostaneme

$$p_1^{1/\kappa} Sh = \left(p_1 + \frac{mg}{2S}\right)^{1/\kappa} S(h - \Delta h)$$

a po úpravách

$$\Delta h = h\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_1 + \frac{mg}{2S}}\right)^{1/\kappa}\right)\,,$$

což po číselném dosazení pro $\kappa = 7/5$ dohromady s převodem $1\,\mathrm{psi} = 6\,895\,\mathrm{Pa}$ dává pokles zdvihu $\Delta h \doteq 7{,}1\,\mathrm{cm}$.

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

***FYKOS***
***UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta***
***Ústav teoretické fyziky***
***V Holešovičkách 2***
***180 00 Praha 8***

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
***http://www.facebook.com/Fykos***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.