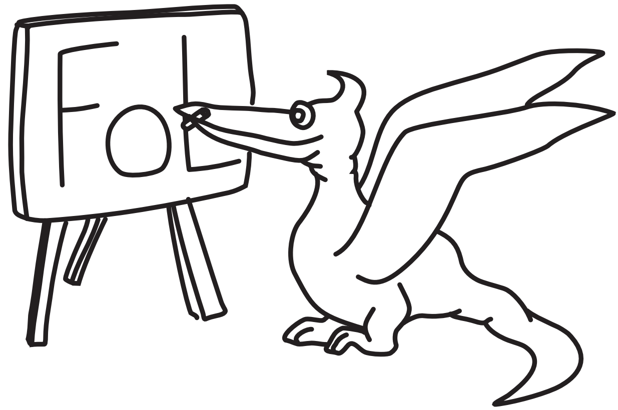
Řešení úloh 4. ročníku Fyziklání online



Úloha FoL.1 ... hloubavá

Aleš seděl hluboce zamyšlen a házel si přitom míčkem o stěnu. Míček vždy hodil rychlostí $v_0 = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ *pod úhlem* $\alpha = 60^\circ$ *od svislice. Nacházel se přitom v úzké chodbě o šířce* $d = 1{,}5\,\mathrm{m}$*, takže se míček pokaždé několikrát odrazil od stěn. Určete, jak vysoko míček vystoupá z místa vypuštění, jestliže jsou odrazy od svislých stěn dokonale pružné. Tíhové zrychlení je* $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Mirkova mechanická představa periodických okrajových podmínek.

Míček vylétá pod elevačním úhlem $\pi/2 - \alpha$ po parabolické trajektorii. Při nárazu do svislé stěny se vertikální složka vektoru hybnosti zachová a horizontální složka změní znaménko. Míček se tedy bude nadále pohybovat jako při šikmém vrhu, pouze v bodě nárazu dojde k zrcadlení trajektorie podél roviny stěny. Pro výpočet maximální dosažené výšky proto můžeme uvažovat případ, kdy pohyb míčku není stěnami vůbec omezen.

Ještě snazší je však vyjít ze zákona zachování mechanické energie, kdy vzhledem k zachovávání vodorovné složky můžeme o úloze uvažovat jako o svislém vrhu s počáteční rychlostí $v_0 \sin(\pi/2 - \alpha)$. Maximální výška je potom

$$h_{\max} = v_0^2 \sin^2(\pi/2 - \alpha)/(2g) \doteq 1{,}27\,\mathrm{m}\,.$$

Míček vystoupá z místa vypuštění do výšky $h_{\max} \doteq 1{,}27\,\mathrm{m}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.2 ... je Ti teplo, děvče?

Pan Kulička (který je dokonale sférický) má na sobě přiléhavou homogenní bundu zanedbatelné tloušťky (vůči rozměrům pana Kuličky). Pan Kulička vyšel ven a po nastolení tepelné rovnováhy byla teplota na vnitřním povrchu bundy $25\,^\circ\mathrm{C}$*, na vnějším povrchu* $-5\,^\circ\mathrm{C}$*. Jaká teplota (ve stupních Celsia) bude přesně uprostřed bundy (v polovině tloušťky vrstvy)?*

Luboškovi je občas zima.

Tloušťka vrstvy je zanedbatelná vůči poloměru pana Kuličky, takže úlohu lze řešit jako rovinný problém. Vedení tepla závisí lineárně na rozdílu teplot a již byla ustálena rovnováha, proto se v bundě musí teplota měnit lineárně. Odtud již vyplývá, že teplota uprostřed bundy bude aritmetický průměr teplot na jejích koncích, tedy $10\,^\circ\mathrm{C}$.

Lubomír Grund
`grund@fykos.cz`

Úloha FoL.3 ... budiž tma

Na měděném dvouvodičovém vedení došlo ke zkratu. Na jednom z konců vedení jsme změřili ohmmetrem odpor $R = 65{,}3\,\mathrm{m\Omega}$*. V jaké vzdálenosti od tohoto konce došlo ke zkratu? Měrný elektrický odpor mědi je* $\varrho = 1{,}71 \cdot 10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$*, průměr jednoho vodiče je* $d = 1{,}50\,\mathrm{mm}$.

Mirkovi na koleji vypadly pojistky.

Odpor vodiče délky l s průřezem $S = \pi d^2/4$ a rezistivitou ϱ je udán vztahem

$$R = \frac{\varrho l}{S}\,.$$

V našem případě se jedná o dvouvodičové vedení, proto je vzdálenost zkratu od konce vedení pouze $l/2$. Vyjádříme tedy délku $l/2$ a číselně dosadíme

$$\frac{l}{2} = \frac{RS}{2\varrho} = \frac{R\pi d^2}{8\varrho} = 3{,}37\,\mathrm{m}\,.$$

Ke zkratu došlo 3,37 m od konce vedení, od kterého byl měřen odpor.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.4 ... čím řidší, tím lepší

Dominika si doma tajně připravuje homeopatika. Vezme přitom hrnek s $V_0 = 200\,\mathrm{ml}$ roztoku o koncentraci $c_0 = 0{,}001\,\mathrm{M}$ účinné látky, polovinu vylije a zbytek doplní čistou vodou opět do objemu V_0. Tento proces provede celkem 70-krát. Kolik molekul účinné látky by mělo statisticky v hrnku zbýt? Předpokládejte, že po každém dolití vody dojde k dokonalému promísení.

Mirek slyšel zvěsti.

Uvažujeme-li dokonalé promísení roztoku po každém dolití, zmenší se pokaždé koncentrace na polovinu. Po i dolitích má roztok koncentraci

$$c_i = \frac{c_0}{2^i}\,.$$

Látkové množství při známé koncentraci a objemu je

$$n_i = c_i V_0\,,$$

počet molekul N_i získáme vynásobením Avogadrovým číslem N_A

$$N_i = N_\mathrm{A} c_i V_0 = 2^{-i} N_\mathrm{A} c_0 V_0\,.$$

Pro $i = 70$ pak dostaneme

$$N_{70} \doteq 0{,}10\,.$$

Statisticky zbude v hrnku pouhá jedna desetina molekuly.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.5 ... selhání brzd

Nákladnímu autu selžou brzdy a potřebuje nouzově zastavit. Naštěstí projíždí záplavovým územím, takže řidič může auto nasměrovat do všudypřítomných pytlů s pískem. Auto má hmotnost $M = 6\,\mathrm{t}$, jeden pytel váží $m = 60\,\mathrm{kg}$. Po kolika srážkách zpomalí auto z $v_0 = 50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ na 75 % původní rychlosti, jestliže jsou srážky s pytli dokonale nepružné? Předpokládejte, že veškeré sražené pytle auto tlačí bez tření před sebou.

Mirek byl donucen nahradit lidi za pytle s pískem.

Označme počet potřebných srážek n, rychlost po n srážkách v_n a poměr výsledné a počáteční rychlosti $\alpha = v_n/v_0$. Platí zákon zachování hybnosti

$$Mv_0 = (M+m)v_1 = (M+2m)v_2 = \ldots = (M+nm)v_n\,.$$

Dělením koncové a počáteční hybnosti dostaneme

$$\frac{v_n}{v_0} = \alpha = \frac{M}{M + nm}\,,$$

z čehož vyjádříme[1]

$$n = \left\lceil \frac{M}{m}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\right\rceil = 34\,.$$

Nákladní auto zpomalí na 75 % původní rychlosti po sražení 34 pytlů.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.6 ... plíseň v knihovně

V některých knihovnách se kvůli ochraně knih před navlhnutím udržuje relativní vlhkost vzduchu $\varphi_0 = 25\,\%$. Jaká je hmotnost vody potřebné k tomu, aby se po jejím odpaření z takovéto knihovny stalo vhodné místo pro plísně? Ideální relativní vlhkost pro růst plísní je $\varphi_\mathrm{p} = 60\,\%$. Objem vzduchu v knihovně je $V = 180\,\mathrm{m^3}$, teplota v knihovně je konstantní $t = 24\,^\circ\mathrm{C}$ a hmotnost nasycené vodní páry v $1\,\mathrm{m^3}$ vzduchu při teplotě $24\,^\circ\mathrm{C}$ je $21{,}8\,\mathrm{g}$.

Lydka snívá o vlastní knihovně.

Z definície platí vzťah

$$\Phi = \varphi \Phi_\mathrm{max}\,,$$

kde Φ je absolútna vlhkosť vzduchu a Φ_max je maximálna absolútna vlhkosť. Ďalej platí

$$\Phi = \frac{m}{V}\,,$$

kde m je hmotnosť vodnej pary v miestnosti a V jej objem. Absolútna vlhkosť je teda hmotnosť nasýtenej vodnej pary v danom objeme. Z toho dostaneme

$$m = \varphi \Phi_\mathrm{max} V\,.$$

Pre hľadanú hmotnosť vody potom platí $m = m_\mathrm{p} - m_0$, kde m_0 a m_p sú hmotnosti vodnej pary pri relatívnych vlhkostiach vzduchu φ_0, resp. φ_p. Po dosadení dostaneme

$$m = \Phi_\mathrm{max} V (\varphi_\mathrm{p} - \varphi_0) \doteq 1{,}37\,\mathrm{kg}\,.$$

Aby sa z knižnice stalo ideálne miesto pre rast plesní, museli by sme v nej nechať odpariť 1,37 kg vody.

Lýdia Janitorová
`janitorova@fykos.cz`

[1] Kde $\lceil x \rceil = \min\{m \in \mathbb{Z} | m \geq x\}$ je značení pro horní celou část x.

Úloha FoL.7 ... server not found

Počítač X je připojen dvěma optickými kabely k dalším dvěma počítačům A a B. Celková délka obou optických kabelů je $l = 3{,}0\,\mathrm{km}$. V čase $1\,413\,753\,899{,}213\,592\,1\,\mathrm{s}$ (Unix timestamp na hodinách počítače X) přijal počítač X zprávu od počítače A, v níž byl čas odeslání šílených $1\,413\,753\,899{,}213\,575\,3\,\mathrm{s}$ (Unix timestamp na hodinách počítače A). Obdobně v odporném čase $1\,413\,753\,906{,}459\,900\,4\,\mathrm{s}$ přijal týž počítač zprávu od B, jež nesla čas odeslání $1\,413\,753\,906{,}459\,892\,5\,\mathrm{s}$. Hodiny počítačů A a B jsou synchronní, ale hodiny počítače X se oproti nim předbíhají nebo opožďují, naštěstí je ale tento posun v čase konstantní. Zanedbejte relativistické jevy, časy zpracování zpráv a při rychlosti světla v kabelu $c = 2{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ v přímém směru určete délku kabelu mezi A a X. *Michal ubíral dimenze z rovnic pro GPS.*

Označme Δ posun lokálních hodin vůči společným hodinám A a B. Dále budiž s_b značit čas odeslání zprávy ze stroje B podle jeho hodin a r_b značí čas příjmu zprávy od stroje B podle hodin přijímací strany. Pak pro hledanou vzdálenost x platí

$$cr_a = cs_a + x + c\Delta\,,$$
$$cr_b = cs_b + l - x + c\Delta\,.$$

Řešením soustavy pro x je

$$x = \frac{c(r_a - s_a - (r_b - s_b)) + l}{2}\,,$$

což po dosazení hodnot ze zadání dává výsledek $x \doteq 2\,390\,\mathrm{m}$.

Michal Koutný
`michal@fykos.cz`

Úloha FoL.8 ... utopený Archimédes

Na obrázku jsou schematicky znázorněné dvě situace s hliníkovou koulí, válcovou kádinkou s vodou a držákem na kouli. V situacích

a) na váze stojí držák, který drží kouli, která je plně ponořena ve vodě, ale kádinku někdo drží nad váhou,

b) kádinka již byla položena na váhu.

Určete rozdíl $\Delta m = m_b - m_a$ hmotností m_b, resp. m_a, které ukáže váha v situacích b), resp. a).

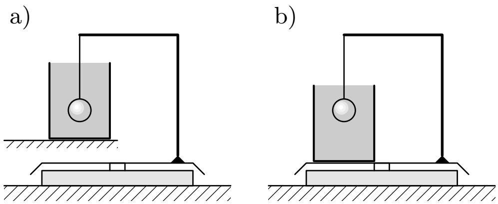
Poloměr homogenní koule je $r = 1{,}03\,\mathrm{cm}$, vnitřní poloměr kádinky je $R = 3{,}01\,\mathrm{cm}$. Kádinka je zaplněná do výšky $h = 5{,}10\,\mathrm{cm}$ vodou (po ponoření hliníkové koule). Hustota vody je $\varrho = 996\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a hliníku $\varrho_{Al} = 2\,700\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Prázdná kádinka má hmotnost $m_n = 124{,}5\,\mathrm{g}$. Závěs, na kterém visí koule, je zanedbatelného objemu a zanedbatelné hmotnosti. Zbytek držáku má hmotnost $m_d = 523{,}5\,\mathrm{g}$. Váha má dostatečný rozsah, aby ukázala obě hmotnosti, a to s přesností $0{,}1\,\mathrm{g}$. Hustotu vzduchu považujte za zanedbatelnou. Nezapomeňte, že chceme odpověď v kilogramech. *Karel chtěl zadat něco, co má velice jednoduchý výpočet, ale někdo si na tom vyláme zuby, jak bude počítat mezivýsledky na kalkulačce.*

Uvědomme si nejprve, co „navážíme“ v jednotlivých případech. V situaci

a) na váze stojí držák a ten drží kouli, která je ovšem nadlehčována vztlakovou silou. Naměříme tedy

$$m_a = m_\mathrm{d} + (\varrho_\mathrm{Al} - \varrho)\,V_\mathrm{k}\,,$$

kde $V_\mathrm{k} = 4\pi r^3/3$ je objem koule.



b) je pak na váze navíc kádinka s vodou a koulí. Navážíme tedy

$$m_b = m_\mathrm{d} + \varrho_\mathrm{Al} V_\mathrm{k} + m_\mathrm{n} + \varrho V_\mathrm{v}\,,$$

kde $V_\mathrm{v} = \pi h R^2 - 4\pi r^3/3$ je objem vody v kádince. Účelnější by bylo ale vyjádřit si objem vody pomocí objemu válce o výšce h a poloměru R, který nazveme V_n. Platí $V_\mathrm{v} = V_\mathrm{n} - V_\mathrm{k}$, takže

$$m_b = m_\mathrm{d} + \varrho_\mathrm{Al} V_\mathrm{k} + m_\mathrm{n} + \varrho V_\mathrm{n} - \varrho V_\mathrm{k}\,.$$

Chceme znát rozdíl hmotností $\Delta m = m_b - m_a$, který však už jednoduše dopočítáme

$$\Delta m = m_b - m_a = m_n + \varrho V_\mathrm{n} = m_\mathrm{n} + \pi \varrho h R^2 \doteq 0{,}269\,1\,\mathrm{kg} = 269{,}1\,\mathrm{g}\,.$$

Správná odpověď tedy je, že rozdíl toho, co nám váha ukáže, je v základních jednotkách 0,269 1 kg.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.9 ... vagón na kusé koleji

Na dlouhé kusé koleji stojí vagón o hmotnosti $M = 20\,\mathrm{t}$, který se po ní může pohybovat bez tření. Uvnitř vagónu stojí slon o hmotnosti $m = 4\,\mathrm{t}$. Slon se rozhodne popojít ve vagónu o vzdálenost $l = 12\,\mathrm{m}$ a pak se zastavit. O jak velkou vzdálenost se vagón pohnul? (Slon se pohybuje pouze rovnoběžně s kolejemi, protože je vagon pro něj dost úzký.)

Michal se snažil vymyslet vtip o vagónu na kusé koleji.

Využijeme toho, že těžiště soustavy slon a vagón se po ukončení pohybu musí z hlediska vnějšího pozorovatele nacházet ve stejném bodě jako na začátku, neboť na soustavu nepůsobily žádné vnější síly. Hmotnost slona tvoří $m/(m + M) = 1/6$ celkové hmotnosti vagónu se slonem. Při přesunu slona o vzdálenost l se v soustavě spojené s vagónem posune výsledné těžiště o $l/6 = 2\,\mathrm{m}$. Pro vnějšího pozorovatele se tedy vagón posune o $2\,\mathrm{m}$ proti směru pohybu slona.

Michal Nožička
`nozicka@fykos.cz`

Úloha FoL.10 ... autobus v dešti

Jaký objem vody (v litrech) dopadne na autobus Karosa 700*, který jede po dobu jedné hodiny rychlostí $v_\mathrm{a} = 50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$? Autobus považujte za kvádr s výškou $h = 4\,\mathrm{m}$, šířkou $w = 2{,}5\,\mathrm{m}$ a délkou $l = 12\,\mathrm{m}$; déšť padá rychlostí $v_\mathrm{d} = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ kolmo dolů a jeho tok (objem, který dopadne na jednotkovou plochu za jednotkový čas) je $Q = 5\,\mathrm{mm{\cdot}h^{-1}}$.*

Xellos utíkal před deštěm.

Pracujme vo vzťažnej sústave dažďa. Tu sa dážď nehýbe a autobus letí hore rýchlosťou v_d, stačí teda vypočítať objem, ktorý „vyžerie“ za čas $t = 1\,\mathrm{h}$, a objem vody v ňom.

V kocke so stranou a (ktorú dážď preletí za čas a/v_d) je objem

$$Qa^2\frac{a}{v_\mathrm{d}} = a^3\frac{Q}{v_\mathrm{d}}$$

vody, preto je v priestore objemu V voda objemu VQ/v_d.

Strop autobusu vyžerie rovnobežnosten s podstavou wl a výškou $v_\mathrm{d}t$, ktorého objem je $V_1 = wlv_\mathrm{d}t$. Predná strana autobusu vyžerie ďalší rovnobežnosten s podstavou wh a výškou $v_\mathrm{a}t$, ktorého objem je $V_2 = whv_\mathrm{a}t$. Spolu dostávame objem dažďa

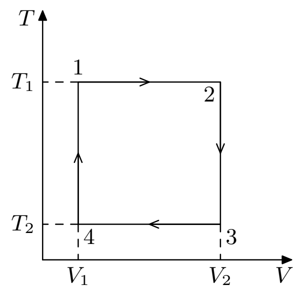
$$V_\mathrm{d} = (V_1 + V_2)\frac{Q}{v_\mathrm{d}} = Qw\left(l + \frac{v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{d}}h\right)t \doteq 219\,\mathrm{l}\,.$$

Na autobus dopadne behom jednej hodiny jazdy 219 l vody.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FoL.11 ... na vlastní pohon

Vypočítejte účinnost (v %) kruhového děje mezi teplotami $T_1 = 373\,\mathrm{K}$ a $T_2 = 273\,\mathrm{K}$, tvořeného dvěma izotermickými a dvěma izochorickými procesy (viz obrázek), pokud je teplo, které se uvolní při izochoře $2 \rightarrow 3$, dodané do izochory $4 \rightarrow 1$. *Xellos sledoval křečka v kolečku.*



Pri izochorickom procese sa nekoná práca, preto je teplo uvoľnené pri ochladení z teploty T_2 na teplotu T_1 rovnaké ako teplo potrebné na spätné ohriatie. Izochory sa teda presne vykompenzujú a na výslednú účinnosť nemajú vplyv. Pri expanzii z objemu V_1 na V_2 pri procese $1 \rightarrow 2$ plyn vykoná prácu

$$W_1 = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}\,;$$

dodať musíme rovnako veľké množstvo tepla $Q = W_1$. Pri spätnom stlačení pri procese $3 \rightarrow 4$ plyn vykoná prácu $W_1 = -nRT_2\ln(V_2/V_1)$ a žiadne teplo dodať nemusíme. Účinnosť potom vypočítame ako

$$\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \doteq 0{,}268 = 26{,}8\,\%\,.$$

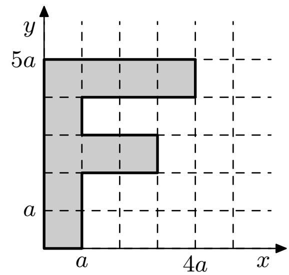
Náš kruhový dej má teda rovnakú účinnosť ako Carnotov cyklus medzi teplotami T_1 a T_2.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha FoL.12 ... těžiště nejdůležitějšího písmene

Neříkali jste si někdy, že F *je vlastně nejdůležitější písmeno? Najděte polohu y-ové souřadnice hmotného středu písmena* F *vytvořeného z 10 stejných malých homogenních čtverečků o straně a. Polohu hmotného středu určete jako násobek a v souřadnicové síti dle obrázku s přesností na tři platné cifry.* *Karel přemýšlel nad důležitostí* F.

Pro souřadnici y hmotného středu musí platit



$$m_{\mathrm{celk}} y = M \,,$$

kde M je celkový moment $\sum m_i y_i$ vytvořený všemi čtverečky a m_{celk} celková hmotnost písmene. Vzhledem k tomu, že čtverečky jsou homogenní, tak víme, že jejich hmotný střed je uprostřed (tj. 0,5a od jejich okraje), a když uvážíme, že jeden čtvereček váží $m = m_{\mathrm{celk}}/10$, tak můžeme zapsat rovnici a vyřešit ji

$$\begin{aligned} 10my &= ma(1\cdot 0{,}5 + 1\cdot 1{,}5 + 3\cdot 2{,}5 + 1\cdot 3{,}5 + 4\cdot 4{,}5)\,,\\ y &= 3{,}1a\,. \end{aligned}$$

Požadovaná přesnost odpovědi byla na tři platné cifry, hledaná poloha tedy je 3,10a. Pokud bychom chtěli x-ovou souřadnici, pak by to bylo $x = 1{,}4a$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.13 ... síření sudů

Jako konzervační prostředek ve vinných sudech byl a stále je používán oxid siřičitý. Jednou z technik síření sudů je pálení sirných disků přímo uvnitř sudů. Do sudu o objemu 200 l *vložíme dva sirné disky, z nichž každý obsahuje* 2 g *síry. Disky zapálíme a sud neprodyšně uzavřeme. Jaký objemový zlomek bude v sudu zaujímat oxid siřičitý po úplném spálení síry v obou discích na* SO_2*? Po spálení disků se teplota vrátí na původních $T = 20\,^\circ\mathrm{C}$, molární hmotnost síry je $M = 32\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, atmosférický tlak je $p = 101\,\mathrm{kPa}$.*

Mirek ví o fyzicích a chemických výpočtech své.

Hoření síry je popsáno jednoduchou chemickou rovnicí

$$\mathrm{S} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{SO_2}\,.$$

Z jednoho molu síry tedy vznikne přesně jeden mol oxidu siřičitého. Objem jednoho molu plynu je za daných podmínek

$$V_{\mathrm{m}} = \frac{RT}{p}$$

a látkové množství oxidu určíme z jednoduchého vztahu

$$n_{\mathrm{SO_2}} = \frac{2m}{M}\,,$$

kde m označuje hmotnost síry obsažené v jednom disku. Objemový zlomek φ je poměr objemu $V_{\mathrm{SO_2}}$ ku celkovému objemu V, tedy

$$\varphi = \frac{V_{\mathrm{SO_2}}}{V} = \frac{n_{\mathrm{SO_2}} V_{\mathrm{m}}}{V} = \frac{n_{\mathrm{SO_2}} RT}{pV} \doteq 0{,}015\,1$$

Hledaný podíl SO_2 v disku je 0,015 1. The wanted fraction of SO_2 in cask is 0,015 1.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.14 ... nehop

Vodorovná deska koná svislé harmonické kmity s periodou $T = 0{,}5\,\mathrm{s}$. Na ní leží těleso. Jakou největší amplitudu A (v centimetrech) mohou mít kmity desky, aby těleso od desky ještě neodskakovalo? Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

f(Aleš) si vypůjčil z moudré knihy let dávno minulých.

Těleso od desky neodskočí, jestliže v horním bodě obratu se začne deska pohybovat svisle dolů se zrychlením nejvýše rovným tíhovému zrychlení, které jediné působí na těleso při pohybu svisle dolů. Poloha y harmonicky kmitající desky je dána vztahem

$$y = A \sin \omega t\,,$$

přičemž kladný směr svislé osy volíme vzhůru. Zrychlení a harmonického pohybu v libovolném čase t určíme jako druhou časovou derivaci polohy

$$a = -\omega^2 A \sin \omega t\,.$$

V bodě horního obratu je $t = T/4$, takže máme rovnici

$$-g = -\omega^2 A \sin \omega \frac{T}{4}\,.$$

Využijeme ještě $\omega = 2\pi/T$ a $\sin \pi/2 = 1$ a máme

$$A = \frac{gT^2}{4\pi^2} \doteq 6{,}2\,\mathrm{cm}\,.$$

Těleso nezačne odskakovat, pokud amplituda kmitů nepřesáhne 6,2 cm.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha FoL.15 ... čajík

Náry se rozhodl, že si udělá mátový čaj. V návodu na krabičce stálo: „Zalijte čajový sáček vařící vodou.“ A to jej přivedlo na myšlenku: Kolik tepelné energie na přípravu čaje podle návodu by se ušetřilo, pokud by jej připravoval na vrcholu slovinského Triglavu (2 864 m nad mořem) místo doma v Boskovicích? V Boskovicích je tlak $p_\mathrm{B} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$ a teplota $t_\mathrm{B} = 25\,^\circ\mathrm{C}$. Na Triglavu je teplota $t_T = 13\,^\circ\mathrm{C}$ a stejné množství ideálního plynu jako v Boskovicích by zde mělo 1,44-krát větší objem. Mezi teplotou varu vody t_v a tlakem p platí v rozumném rozmezí tlaků vztah

$$t_v = \tau + kp\,,$$

kde $\tau = 71{,}6\,^\circ\mathrm{C}$ a $k = 2{,}8\cdot 10^{-4}\,\mathrm{K{\cdot}Pa^{-1}}$. Na čaj je potřeba ohřát $m = 600\,\mathrm{g}$ vody, jejíž výchozí teplota je v obou případech $t_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Jakékoliv tepelné ztráty při ohřevu zanedbejte. Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4\,180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. *Kiki a Tom mají nadměrnou spotřebu čaje.*

Abychom zjistili teplotu varu vody na Triglavu, je potřeba určit, jaký je zde tlak p_T, pomocí stavové rovnice ideálního plynu. Platí

$$\frac{p_\mathrm{B} V_\mathrm{B}}{T_\mathrm{B}} = \frac{p_\mathrm{T} V_\mathrm{T}}{T_\mathrm{T}}\,,$$

kde indexy B přísluší hodnotám tlaku, objemu a teplotě v Boskovicích a indexy T označují hodnoty na Triglavu. Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit tlak

$$p_\mathrm{T} = p_\mathrm{B} \frac{V_\mathrm{B}}{V_\mathrm{T}} \frac{T_\mathrm{T}}{T_\mathrm{B}} = \frac{p_\mathrm{B} T_\mathrm{T}}{p T_\mathrm{B}}\,.$$

Rozdíl Δt mezi teplotou varu vody v Boskovicích t_vB a teplotou varu na Triglavu t_vT bude úměrný úspoře energie ΔQ, neboť pokaždé začneme ohřívat vodu stejné teploty (ať už se nám to při rozdílných teplotách vzduchu povedlo jakkoliv) a tepelné ztráty neuvažujeme. Výsledek tedy dopočteme jako

$$\Delta Q = mc\Delta t\,,$$

kde

$$\Delta t = t_\mathrm{vB} - t_\mathrm{vT} = k(p_\mathrm{B} - p_\mathrm{T}) = kp_\mathrm{B}\left(1 - \frac{T_\mathrm{T}}{pT_\mathrm{B}}\right)\,,$$

tedy

$$\Delta Q = mckp_\mathrm{B}\left(1 - \frac{T_\mathrm{T}}{pT_\mathrm{B}}\right)\,.$$

Číselně tedy dostáváme $\Delta Q = 23\,700\,\mathrm{J}$.

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha FoL.16 ... děsivé nakupování bot

Kiki se vydala nakupovat $^{18}\mathrm{F}$ do $s = 1\,500\,\mathrm{km}$ vzdáleného obchodního centra v Londýně. Protože věděla, že není moc kvalitní a jeho poločas rozpadu je 1,8 h, koupila si rovnou 32 g. Jakou rychlostí v $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ by musela letět letadlem, aby si domů donesla o 10 g $^{18}\mathrm{F}$ víc, než kdyby jela 24 h autobusem? *Dominika letos reklamovala již třetí boty a přemýšlí, jak to ostatní dělají, že se jim tolik nerozpadají.*

Poločas rozpadu je definován jako doba, za kterou se přemění polovina částic ve vzorku. Počet částic N, a tedy hmotnost m (přímá úměrnost) v čase t potom bude

$$m = m_0 2^{-t/T}\,,$$

kde m je hmotnost nerozpadlého ^{18}F v čase t, m_0 je původní hmotnost a T je poločas rozpadu. Vyjádřeme rozdíl $\Delta m = 10\,\mathrm{g}$, kterého chce Kiki rychlejší cestou dosáhnout.

$$\Delta m = m_0 \left(2^{-t_\mathrm{l}/T} - 2^{-t_\mathrm{b}/T}\right)\,,$$

kde t_l je doba cesty letadlem a t_b doba cesty autobusem. Kiki to letadlem trvá $t_\mathrm{l} = s/v_\mathrm{l}$, kde v_l je hledaná rychlost. Dosadíme do předchozí rovnice a vyjádříme hledanou rychlost

$$v_\mathrm{l} = \frac{s}{T \log_2 \dfrac{1}{\dfrac{\Delta m}{m_0} + 2^{-t_\mathrm{b}/T}}}\,.$$

Výsledný výraz se ovšem citelně zjednoduší, pokud si uvědomíme, že $2^{-t_\mathrm{b}/T} \ll \Delta m/m_0$. Pak můžeme psát

$$v_\mathrm{l} \approx \frac{s}{T \log_2 \dfrac{m_0}{\Delta m}} \doteq 500\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Aby si Kiki dovezla o 10 g fluoru více, muselo by letadlo letět rychlostí $v_\mathrm{l} = 500\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha FoL.17 ... když to srovnám s výletem na Kokořín...

Majitelé hradu Kokořín byli velmi moderní a již na přelomu devatenáctého a dvacátého století zavedli do krbu plynové topení. Spalovaným plynem byl acetylen vznikající reakcí karbidu vápenatého s vodou

$$\mathrm{CaC_2 + 2\,H_2O \longrightarrow C_2H_2 + Ca(OH)_2}\,.$$

Porovnejte výhodnost topení plynem oproti topení dřevem, tj. nalezněte poměr energie získané z hmotnostní jednotky dřeva a hmotnostní jednotky karbidu, jestliže máte k dispozici následující údaje: hustota karbidu $\varrho(\mathrm{CaC_2}) = 2\,200\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*, molární hmotnost karbidu* $M(\mathrm{CaC_2}) = 64\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$*, výhřevnost acetylenu* $H(\mathrm{C_2H_2}) = 48\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$*, molární hmotnost acetylenu* $M(\mathrm{C_2H_2}) = 26\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$*, výhřevnost dřeva* $H_d = 14\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$*, hustota dřeva* $\varrho = 520\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*. Předpokládejte, že vody je na hradě dostatek. Zahrňte do energetické bilance skutečnost, že při dopravě paliva z vesnice na hrad je potřeba překonat výškový rozdíl* $h = 50\,\mathrm{m}$*. Velikost tíhového zrychlení je* $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$*.* *Mirek a Lukáš na výletě.*

Nechť máme od každého paliva hmotnost m, potom z nich získáme energii

$$E_\mathrm{d} = mH_\mathrm{d} - mgh$$
$$E(\mathrm{CaC_2}) = m\frac{M(\mathrm{C_2H_2})}{M(\mathrm{CaC_2})}H(\mathrm{C_2H_2}) - mgh\,,$$

kde jsme rovnou přepočetli hmotnost karbidu na odpovídající hmotnost acetylenu. Energie získaná spalováním je snížena o energii potřebnou k překonání výškového rozdílu. Pohledem na velikosti zadaných veličin však ihned zjistíme, že rozdíl specifických potenciálních energií je zanedbatelný vůči výhřevnosti obou paliv. Poměr energetických bilancí je

$$\frac{E_\mathrm{d}}{E(\mathrm{CaC_2})} = \frac{H_\mathrm{d} - gh}{\frac{M(\mathrm{C_2H_2})}{M(\mathrm{CaC_2})} H(\mathrm{C_2H_2}) - gh} \approx \frac{M(\mathrm{CaC_2}) H_\mathrm{d}}{M(\mathrm{C_2H_2}) H(\mathrm{C_2H_2})} \doteq 0{,}72\,.$$

Acetylen je tedy z hlediska výhřevnosti výhodnější než dřevo.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.18 ... náboj

V temné, opuštěné hale stojí na opačných koncích lupič a policista. Kriminální živel zaslechl ve tmě kroky, namířil na nic netušícího ochránce zákona vodorovně revolver a chystá se střílet. Netuší ovšem, že podlaha a strop jsou elektricky nabité tak, že je mezi nimi napětí $U = 10\,\mathrm{kV}$ a vytváří tak v hale homogenní pole, které bude na vystřelenou kulku silově působit (svisle dolů), neboť kulka při průletů hlavní získá náboj q. Zjistěte, jaký nejmenší měrný náboj q/m by kulka musela mít, aby lupič na policistu nedostřelil, jestliže m je hmotnost kulky, vzdálenost k policistovi je $D = 100\,\mathrm{m}$, hala má výšku $d = 8\,\mathrm{m}$ a kulka vylétá ve vodorovném směru rychlostí $v_0 = 400\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Lupič drží revolver ve výšce $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$, tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Mirek chtěl vyzdvihnout důležitost triboelektrického jevu.

V homogenním elektrickém poli $E = U/d$ působí na náboj q síla $F_\mathrm{e} = qE = Uq/d$. Jestliže v homogenním gravitačním poli působí na hmotný bod tíhová síla $F_g = mg$ a urychluje náboj se zrychlením g, musíme v případě přítomnosti elektrického pole toto zrychlení nahradit za

$$g' = \frac{F_g + F_\mathrm{e}}{m} = g + \frac{Uq}{md}\,.$$

Potom stačí do vztahu pro dolet při vodorovném vrhu (odvození je triviální)

$$D = \sqrt{\frac{2h}{g'}} v_0$$

dosadit za g', čímž získáme vztah

$$D = \sqrt{\frac{2h}{g + \frac{Uq}{md}}} v_0\,,$$

ze kterého vyjádříme měrný náboj q/m a číselně dosadíme

$$\frac{q}{m} = \left(\frac{2hv_0^2}{D^2} - g\right) \frac{d}{U} \doteq 0{,}031\,\mathrm{C{\cdot}kg^{-1}}\,.$$

Kulka by musela mít měrný náboj minimálně $0{,}031\,\mathrm{C{\cdot}kg^{-1}}$, aby lupič na policistu nedostřelil, pokud by střílel vodorovně.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.19 ... meloun

Náry seděl na houpačce, která byla v klidu. Najednou dostal chuť na meloun. Fykosáci mu okamžitě jeden o hmotnosti $m_m = 20\,\mathrm{kg}$ hodili rychlostí $v_m = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. O jaký úhel se vychýlil Náry (hmotný bod) na houpačce, jestliže jeho hmotnost je $m_n = 80\,\mathrm{kg}$ a délka lana houpačky $L = 4\,\mathrm{m}$? Předpokládejte, že meloun letěl vodorovně v rovině rotace houpačky. Výsledek uveďte ve stupních. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Lydka jedla meloun.*

Zo zákona zachovania hybnosti dostaneme

$$m_\mathrm{m}v_\mathrm{m} + m_\mathrm{n}v_\mathrm{n} = (m_\mathrm{m} + m_\mathrm{n})\,u\,,$$

kde u je rýchlosť, ktorou sa začne pohybovať Náry s melónom, a $v_\mathrm{n} = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je Náryho počiatočná rýchlosť. Zo zákona zachovania mechanickej energie dostaneme

$$\frac{1}{2}\,(m_\mathrm{m} + m_\mathrm{n})\,u^2 + 0 = 0 + (m_\mathrm{m} + m_\mathrm{n})\,hg\,,$$

kde h je maximálna výška, do ktorej sa Náry s melónom dostane. Počiatočnú výšku pritom volíme nulovú. Z daných rovností dostaneme vzťah

$$h = \frac{(m_\mathrm{m}v_\mathrm{m})^2}{2\,(m_\mathrm{m} + m_\mathrm{n})^2\,g}\,.$$

Potom pre maximálnu výchylku α platí

$$\cos\alpha = \frac{L-h}{L} \quad\Rightarrow\quad \alpha \doteq 18{,}4^\circ\,.$$

Maximálna výchylka hojdačky teda bude 18,4°.

Lýdia Janitorová
`janitorova@fykos.cz`

Úloha FoL.20 ... supravodivá

Máme dva supravodivé kondenzátory s kapacitami $C_1 = 10\,\mathrm{\mu F}$ a $C_2 = 5{,}0\,\mathrm{\mu F}$, supravodivý zdroj stejnosměrného napětí $U = 10\,\mathrm{V}$ a supravodiče na propojení obvodu. Supravodiče jsou dokonalé, nekladou tedy proudu žádný odpor a nemůže v nich docházet k Jouleovu ohřevu. Nejprve zapojíme ke zdroji první kondenzátor a počkáme, až se nabije. Poté kondenzátor od zdroje odpojíme a místo zdroje k němu zapojíme druhý kondenzátor. Určete rozdíl mezi energií samotného prvního kondenzátoru a energií spojených kondenzátorů.

I během zkouškové písemky se Mirek dověděl leccos zajímavého.

Náboj na prvním kondenzátoru je $Q_1 = C_1U$ a jeho energie je

$$W_1 = \frac{Q_1^2}{2C_1} = \frac{1}{2}C_1U^2 = 5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}\,.$$

Po zapojení druhého kondenzátoru se náboj zachová, pouze dojde k jeho rozdělení mezi oba kondenzátory. Kapacita „paralelně“ zapojených kondenzátorů je součet $C = C_1 + C_2$, energie soustavy je potom

$$W = \frac{Q_1^2}{2(C_1 + C_2)} \doteq 3{,}3\cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}\,,$$

rozdíl v energiích je tedy

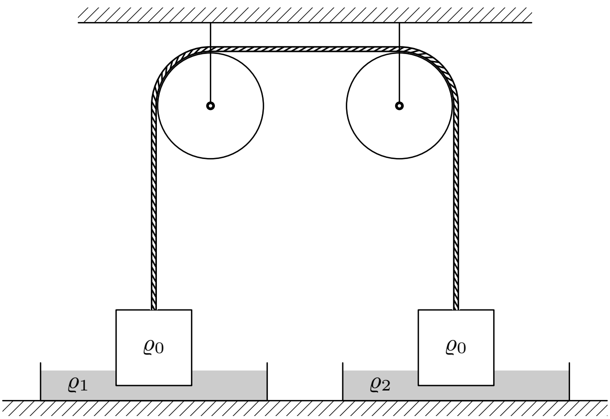
$$\Delta W = W_1 - W = \frac{C_1 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)} \doteq 1{,}7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}\,.$$

Ačkoli nedochází k Jouleově ohřevu, dostáváme nenulovou hodnotu. Energie je totiž vyzářena ve formě elektromagnetických vln vznikajících při oscilaci nábojů mezi kondenzátory.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.21 ... kmity-kladka-vztlak

Dva shodnéválečky s poloměrem podstav $5\,\mathrm{cm}$, *výškou* $10\,\mathrm{cm}$ *a hustotou* $\varrho_0 = 2{,}2\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ *jsou v rovnováze, z části ponořené do dvou nádob (viz obrázek). Kapaliny v těchto nádobách mají postupně hustoty* $\varrho_1 = 1{,}0\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ *a* $\varrho_2 = 0{,}8\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. *Spočítejte periodu malých vertikálních výchylek tohoto systému okolo rovnováhy. Předpokládejte, že změna výšky hladiny kapaliny je zanedbatelná a lanka jsou nehmotná. Tíhové zrychlení je* $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Vymyslel Janči.*



Pohybové rovnice pre výchylku x okolo rovnováhy sú postupne pre oba valčeky

$$m\ddot{x} = -T - Sx\varrho_1 g$$

a

$$m\ddot{x} = T - Sx\varrho_2 g\,,$$

kde sme označili m ako hmotnosť valčeka, S jeho horizontálny prierez a T ťahovú silu v lanku. Kladný smer x je zvolený smerom dole pre prvé teliesko, zrýchlenie pre druhé teliesko má opačný smer. Sčítaním polovíc týchto rovníc dostaneme

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2}Sx(\varrho_1 + \varrho_2)g\,,$$

v čom vidíme pohybovú rovnicu pre kmity s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{S(\varrho_1 + \varrho_2)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2V}{gS}\frac{\varrho_0}{\varrho_1 + \varrho_2}}\,.$$

Vieme, že V/S je jednoducho výška valčeka a dosadením dostaneme $T \doteq 0{,}99\,\mathrm{s}$.

Pre tých, ktorých zaujalo, že výsledok závisí iba na výške a hustote valčeka, skúste tento fakt interpretovať ako dôsledok možnosti superpozície takýchto oscilátorov.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha FoL.22 ... na hlavičku

Nová nástěnka si žádala nový hřebík, ten měl délku $l = 80\,\mathrm{mm}$ a k jeho zatlučení bylo použito kladivo o hmotnosti $m = 0{,}4\,\mathrm{kg}$. Bylo potřeba pěti úderů, přičemž při každém z nich mělo kladivo těsně před úderem rychlost $v = 8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (odevzdalo přitom všechnu svou kinetickou energii na zatlučení hřebíku). Jenže nástěnka byla nakřivo. Jak velká síla bude třeba k vytažení hřebíku? Hmotnost hřebíku zanedbejte. Předpckládejte, že třecí síla je přímo úměrná délce hřebíku v nástěnce a je při zatloukání i vytahování stejná.

f(Aleš) umýval nástěnku a přemýšlel u toho.

Při zatlučení hřebíku byla vykonána práce W daná jako

$$W = 5\frac{mv^2}{2}\,.$$

Uvědomíme-li si, že třecí síla je přímo úměrná délce hřebíku, pak vykonaná práce při zatloukání bude daná jako

$$W = \frac{1}{2}F_\mathrm{o}l\,,$$

kde F_o je třecí maximální síla (při nejhlubším zatlučení).

Odtud už snadno vyjádříme třecí sílu, a tedy i sílu nutnou k vytažení hřebíku

$$F_\mathrm{o} = \frac{2W}{l} = \frac{5mv^2}{l} = 1\,600\,\mathrm{N}\,.$$

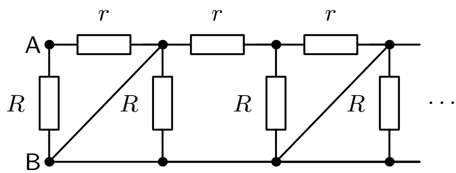
Síla nutná k vytažení hřebíku tedy je $1\,600\,\mathrm{N}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha FoL.23 ... nekonečný obvod

Vypočítejte odpor mezi svorkami A *a* B *na obrázku. Odpory jsou $R = 5\,\Omega$ a $r = 1{,}5\,\Omega$. Odpor přívodních vodičů považujte za nulový.*

Xellosovi se zdá úloha o odporovém žebříku příliš lehká.



Okrem dvoch rezistorov najviac v pravo je zvyšok obvodu zapojený paralelne s drôtom s nulovým odporom a môžeme ho ignorovať. Ostali nám paralelne zapojené rezistory R a r, výsledný odpor je teda

$$\frac{Rr}{R+r} \doteq 1{,}15\,\Omega\,.$$

Názov úlohy len zavádzal, v skutočnosti odpor nekonečného obvodu rátať vôbec netreba.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha FoL.24 ... s fyzikem na bowlingu

Jednou, když si takhle Olda vyšel zahrát bowling, stala se mu velice zajímavá věc. Když totiž mrštil bowlingovou koulí o hmotnosti $7{,}25\,\mathrm{kg}$ *a poloměru* $0{,}108\,\mathrm{m}$ *rychlostí* $12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*, podařilo se mu kouli udělit takovou zpětnou rotaci, že se koule ještě před srážkou s kuželkami zastavila a dále se nepohybovala. Jaká úhlová rychlost (v radiánech za sekundu) to musela být? Gravitační zrychlení je* $9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$*, odpor vzduchu a valivý odpor zanedbejte.*

Organizátoři na bowlingu.

V prvé řadě si musíme uvědomit, jakým mechanismem dochází k brzdění koule. Odpor vzduchu i valivý odpor zanedbáváme, nemůžeme však zanedbat třecí sílu F_T mezi podložkou a koulí. Při tření dochází k disipaci energie ve formě tepla, nebudeme proto moct použít zákon zachování mechanické energie v systému bowlingové koule.

K řešení použijeme dvě základní rovnice newtonovské mechaniky, první a druhou impulsovou větu. První impulsová věta

$$F_\mathrm{T} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,,$$

nabývá v našem případě tvar

$$F_\mathrm{T} t = m v_0\,,$$

kde v_0 je počáteční rychlost, m hmotnost koule a t čas od začátku pohybu do zastavení.

Druhá impulsová věta

$$F_\mathrm{T} r = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}J\omega}{\mathrm{d}t}\,,$$

dostane pro naše počáteční a koncové podmínky tvar

$$F_\mathrm{T} r t = J\omega_0\,,$$

kde J je moment setrvačnosti koule, r je poloměr koule a ω_0 je počáteční úhlová rychlost.

Nyní zbývá vyjádřit si z první impulsové věty celkový čas pohybu a dosadit do druhé impulsové věty, ze které pak po rozepsání momentu setrvačnosti dostaneme hledanou úhlovou rychlost

$$\omega_0 = \frac{F_\mathrm{T} r t}{J} = \frac{5F_\mathrm{T} r}{2mr^2} \frac{mv_0}{F_\mathrm{T}} = \frac{5v_0}{2r} \,.$$

Číselně dostaneme $\omega_0 \doteq 280\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Takto vysokou hodnotu šlo očekávat vzhledem k velké translační kinetické energii koule ihned po vymrštění.

Jiří Nárožný
`nahry@fykos.cz`

Úloha FoL.25 ... vlny a vlnky

Pohyb krátkých vln na hladině rybníka není příliš ovlivněn tíhovým zrychlením, zato na ně má podstatný vliv povrchové napětí. Určete pomocí rozměrové analýzy úhlovou frekvenci vlny v závislosti na povrchovém napětí vody σ, hustotě vody ϱ a vlnovém čísle $k = 2\pi/\lambda$, kde λ je vlnová délka. Bezrozměrnou multiplikativní konstantu položte rovnu jedné. Poté ze získaného vztahu odvoďte výraz pro grupovou rychlost a dosaďte hodnoty $\sigma = 73\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$, $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $\lambda = 2\,\mathrm{cm}$. *Mirek chytal krátké vlny.*

Hledáme závislost ve tvaru $\omega = \sigma^\alpha \varrho^\beta k^\gamma$. Rozepíšeme-li jednotku newton jako $\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}$, dostaneme pro α, β, γ a jednotlivé jednotky (kg, m a s) soustavu tří lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \,, \\ 0 &= -3\beta - \gamma \,, \\ -1 &= -2\alpha \,. \end{aligned}$$

Z třetí rovnice máme $\alpha = 1/2$, dosazením do první získáme $\beta = -1/2$ a nakonec ze druhé rovnice $\gamma = 3/2$. Úhlová frekvence krátké vlny je tedy dána vztahem

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\varrho}} \,.$$

Z definice grupové rychlosti odvodíme

$$v_\mathrm{g} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma k}{\varrho}}$$

a po dosazení $k = 2\pi/\lambda$ a zadaných hodnot dostaneme velikost grupové rychlosti

$$v_\mathrm{g} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\varrho\lambda}} \doteq 0{,}23\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \,.$$

Grupová rychlost je rovna $0{,}23\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.26 ... rozvalený válec

Dominika, jako každý správný inženýr, si občas pouští z kopce homogenní válce. Přitom ji jednou napadlo, že by mohla vymyslet alternativní způsob určení počtu otáček, které válec vykoná, než sjede z nakloněné roviny. Válec zvážila ($m = 123{,}8\,\mathrm{g}$) a určila jeho moment setrvačnosti $J = 1{,}807 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Všichni jistě dobře vědí, že Dominičina nakloněná rovina je $l = 1{,}02\,\mathrm{m}$ dlouhá a že může svírat s vodorovnou podložkou libovolný nenulový úhel α. Kolikrát (myšleno reálné číslo s přesností na tři platné cifry) se popsaný homogenní válec otočí, než dorazí na konec nakloněné roviny? Pouštíme ho z jednoho konce roviny přesně na druhý. Válec sjíždí ve směru maximálního sklonu a neprokluzuje.

Karel přemýšlel nad tím, co bude Dominika dělat, až jednou bude Ing.

Moment setrvačnosti válce je $J = mr^2/2$. Známe jeho hodnotu a známe i hmotnost. Můžeme si tedy vyjádřit poloměr Dominikou využívaného válce

$$r = \sqrt{\frac{2J}{m}} \doteq 1{,}71 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\,.$$

Počet otáček N získáme, pokud vydělíme celkovou dráhu l délkou jedné otáčky, což je vlastně obvod kružnice $o = 2\pi r$,

$$N = \frac{l}{o} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{2J}} \doteq 9{,}50\,.$$

Válec vykoná tedy 9,50 otáček, než dorazí na konec nakloněné roviny.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.27 ... Zdeňkova koule

Zdeněk, jako správný budoucí inženýr, podobně jako Dominika, pouští ze své nakloněné roviny různé předměty. Nicméně on preferuje spíše svou kouli než válec. Chtěl by určit hustotu svojí koule. Ale nemá taky rád nějaká běžná měření, a proto kouli zvážil a zjistil, že má hmotnost $m = 123{,}8\,\mathrm{g}$ (shodou okolností, stejně jako Dominičin válec) a moment setrvačnosti $J = 3{,}48 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Pomozte Zdeňkovi a určete hustotu jeho plné homogenní koule.

Karel přemýšlel, co tam v Brně na tom VUT asi dělají...

Moment setrvačnosti plné homogenní koule je $J = 2mr^2/5$. Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit její poloměr

$$r = \sqrt{\frac{5J}{2m}}\,.$$

Hustotu ϱ vypočítáme jako poměr hmotnosti koule m a jejího objemu $V = 4\pi r^3/3$

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3m}{4\pi}\left(\frac{2m}{5J}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3m^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}5^{\frac{3}{2}}\pi J^{\frac{3}{2}}} \doteq 1{,}59 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Hustota Zdeňkovy koule je tedy $1\,590\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

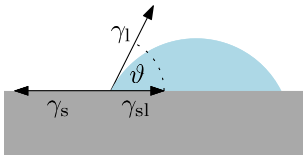
Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.28 ... energický povrch

Jaký kontaktní úhel (ve stupních) bude mít voda s povrchovým napětím $\gamma_l = 74\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$ na rovném povrchu z neznámého materiálu, jehož povrchová energie je $\gamma_s = 53\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$? Mezifázová energie vody a zkoumaného materiálu je $\gamma_{sl} = 25\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$.

Terčin byproduct při vymýšlení řešení experimentálky.

Povrchová energie neboli povrchové napětí (pro čistou kapalinu se jedná o shodné veličiny) nám udává velikost síly, která působí kolmo na délku myšleného řezu povrchem kapaliny, dělenou touto délkou. Tato síla leží v rovině tečné k povrchu.



Pokud na neznámý materiál kápneme vodu, zaujme kapka ustálený, osově symetrický tvar. V kolmém řezu kapkou proto musejí být síly povrchového napětí v rovnováze. Vyjádření této rovnováhy pomocí kontaktního úhlu ϑ nazýváme Youngova rovnice. V námi použitém značení má tvar

$$\gamma_{sl} + \gamma_l \cos\vartheta = \gamma_s\,.$$

Zbývá pouze vyjádřit kontaktní úhel

$$\vartheta = \arccos \frac{\gamma_s - \gamma_{sl}}{\gamma_l} \doteq 68^\circ\,.$$

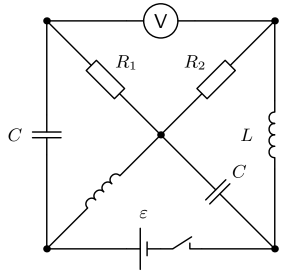
Kontaktní úhel mezi vodou a zkoumaným materiálem je 68°. Může se jednat například o nylon.

Tereza Steinhartová
`terkas@fykos.cz`

Úloha FoL.29 ... obvody pyramidy 2

V obvodu na obrázku jsme zapnuli spínač a počkali, než se proudy v obvodu ustálí. Potom jsme spínač vypnuli. Jaké napětí (ve voltech, v absolutní hodnotě) naměří okamžitě po vypnutí spínače voltmetr? Kondenzátory a cívky považujte za ideální, odpor voltmetru považujte za nekonečný, $\varepsilon = 1\,\mathrm{V}$. Odpor $R_1 = 3R_2$. *Xellos objevil estonsko-finskou fyzikální olympiádu.*

Prúdy tečúce rezistormi budeme rátať v smere od horného vrcholu pyramídy (uzlu v strede obrázku).



Keď je spínač zapnutý, po ustálení sa kondenzátory (diera v kábli) a voltmeter správajú ako vodiče s nekonečným odporom. Cievka je len vodič s nulovým odporom. Rezistorom R_1 preto prechádza prúd $I_1 = 0$ a rezistorom R_2 prúd $I_2 = \varepsilon/R_2$.

Kondenzátor nevie okamžite zmeniť napätie, cievka zasa prúd. Preto po vypnutí spínača rezistorom R_2 prechádza rovnaký prúd I_2. Rezistorom R_1 prechádza teraz prúd $I_3 = I_2$, preto je zmena napätia cez rezistory

$$|R_1 I_3 - R_2 I_2| = 2\varepsilon = 2\,\mathrm{V}\,.$$

Na voltmetri nameráme napätie 2 V.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha FoL.30 ... plynové jouly

Náry jde kolem tlakové nádoby s oxidem siřičitým a na ní vidí různé měřicí přístroje. Celkem jsou tam tři přístroje a k tomu ještě dva údaje na tlakové nádobě. Na nádobě je její objem $V = 1\,\mathrm{m}^3$ a její čistá hmotnost $m = 100\,\mathrm{kg}$. Měřicí přístroje ukazuji hmotnost včetně plynu $M = 152\,\mathrm{kg}$, tlak $p = 5{,}3\,\mathrm{MPa}$ a teplotu. Jenže Náry je krátkozraký a na teploměr nedohlédne, a protože má přebytečné 4 hodiny, rozhodne se spočítat, jaká by byla teplota, kdyby to byl ideální plyn, zdá se mu ale malá, aby to byla ta na měřicím přístroji. Protože má ještě i dalších 6 hodin, jde spočítat i teplotu, kterou by měl van der Waalsův plyn. Jaká je absolutní hodnota rozdílu jeho výsledků v kelvinech? *f(Aleš) zavzpomínal na cvika z termodynamiky.*

Chceme spočítat teplotní rozdíl $\Delta T = T_\mathrm{v} - T_\mathrm{i}$. Musíme tedy spočíst teplotu van der Waalsova plynu T_v a teplotu ideálního plynu T_i. Začněme ideálním plynem, jako Náry. Použijeme stavovou rovnici ideálního plynu

$$pV = nRT_\mathrm{i}\,,$$

odkud snadno vyjádříme teplotu T_i

$$T_\mathrm{i} = \frac{pV}{nR}\,.$$

Pro van der Waalsovu teplotu budeme potřebovat van der Waalsovu stavovou rovnici

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT_\mathrm{v}\,,$$

kde $v = V/n$ je molární objem. Vyjádřená teplota pak je

$$T_\mathrm{v} = \frac{1}{nR}\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb)\,.$$

Nyní už stačí teploty jen odečíst a najít látkové množství n

$$n = \frac{M - m}{M_{\mathrm{SO}_2}}\,,$$

kde M_{SO_2} je molární hmotnost oxidu siřičitého. Nyní teploty odečteme a dosadíme za látkové množství

$$\Delta T = \frac{M_{\mathrm{SO}_2}}{(M - m)\,R}\left[\left(p + \frac{(M - m)^2 a}{V^2 M_{\mathrm{SO}_2}^2}\right)\left(V - \frac{M - m}{M_{\mathrm{SO}_2}} b\right) - pV\right]\,.$$

Nyní stačí dosadit za konstanty. Univerzální plynová konstanta je $R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$, konstanty van der Waalsovy rovnice pro SO_2 jsou $a = 0{,}680\,\mathrm{J{\cdot}m^3{\cdot}mol^{-2}}$, $b = 5{,}64 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3{\cdot}mol^{-1}}$, jeho molární hmotnost je $M_{\mathrm{SO}_2} = 6{,}41 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$. Číselně dostaneme, že rozdíl mezi výpočty je $\Delta T \doteq 28\,\mathrm{K}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha FoL.31 ... šošovica

Při úklidu na Fykosárně se našla tenká čočka a kruhový zdroj světla s průměrem $d = 5\,\mathrm{mm}$. Když čočku umístíme do vzdálenosti $s_1 = 12\,\mathrm{cm}$ a zdroj světla do velké vzdálenosti od stěny, uvidíme na stěně osvětlený bod. Pokud čočku a zdroj umístíme s_2 a l_2 od stěny, uvidíme ostře osvětlený kruh s průměrem $d_2 = 2\,\mathrm{cm}$. Určete vzdálenost l_2 (v cm).

Xellos preferuje experimenty před uklízením.

V prvom prípade vidíme, že šošovka má ohniskovú vzdialenosť $f = s_1$. V druhom prípade vidíme na stene obraz predmetu so zväčšením

$$Z = \frac{d_2}{d} = \frac{s_2}{l_2 - s_2} = 4\,,$$

z čoho vyjadríme

$$s_2 = l_2 \frac{Z}{1+Z}\,.$$

Využijeme zobrazovaciu rovnicu šošovky:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_2} + \frac{1}{l_2 - s_2} &= \frac{1}{f}\,, \\ \frac{1+Z}{Zl_2} + \frac{1+Z}{l_2} &= \frac{1}{f}\,, \\ \frac{(1+Z)^2}{Zl_2} &= \frac{1}{f}\,, \\ l_2 &= \frac{(1+Z)^2}{Z} f \doteq 75\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$

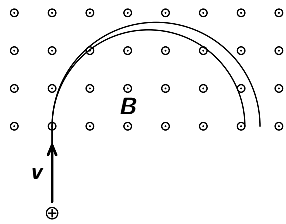
Zdroj bol v druhom prípade umiestnený 75 cm od steny.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha FoL.32 ... hraní v poli

Maťko a Kubko, izotopy neonu s hmotnostními čísly $A_M = 20$ a $A_K = 22$, si vymysleli novou hru. Kubko vždy udělá nějaký pohyb a Maťko se ho pokusí přesně zopakovat. Kubko má náboj $+e$ a vletěl do homogenního magnetického pole s magnetickou indukcí $B = 0{,}24\,\mathrm{T}$ kolmo na indukční čáry. Maťko, který má také náboj $+e$, vletěl do pole v témže místě stejným směrem. Jaká bude vzdálenost d bodů, v nichž magnetické pole opustí, jestliže každý z nich má kinetickou energii $E_K = 6{,}2 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}$? Atomová hmotnostní jednotka $m_u = 1{,}660\,57 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, náboj jednoho elektronu $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Lydka si hrála s magnetkou na chladničce.



Označme r_M, r_K polomery kružníc po ktorých sa budú Maťko a Kubko pohybovať. Potom platí $d = 2|r_\mathrm{K} - r_\mathrm{M}|$. Vypočítajme polomer danej danej kružnice všeobecne pre Kubka aj pre Maťka. Pre pohyb jedného z kamarátov v magnetickom poli platí $F_\mathrm{m} = F_\mathrm{o}$, kde $F_\mathrm{m} = Bev \sin \alpha$ (pohybujú sa kolmo na indukčné čiary, teda $\alpha = 90^\circ$) je magnetická sila, ktorá na neho pôsobí, a $F_\mathrm{o} = mv^2/r$ je odstredivá sila pri pohybe po kružnici. Po dosadení dostaneme vzťah

$$r = \frac{mv}{Be}\,.$$

Ďalej vieme, že platí

$$E_\mathrm{K} = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{K}}{m}}$$

a zároveň pre hmotnosť častice s hmotnostným číslom A platí $m = Am_\mathrm{u}$. Po dosadení dostaneme

$$r = \frac{\sqrt{2Am_\mathrm{u}E_\mathrm{K}}}{Be}\,.$$

Dosadíme do vzťahu pre d

$$d = 2\frac{\sqrt{2A_\mathrm{K}m_\mathrm{u}E_\mathrm{K}}}{Be} - 2\frac{\sqrt{2A_\mathrm{M}m_\mathrm{u}E_\mathrm{K}}}{Be} = 0{,}016\,3\,\mathrm{m}\,.$$

Hladaná vzdialenosť je 0,0163 m. Thus wanted distance of the points is 0,0163 m.

Lýdia Janitorová
janitorova@fykos.cz

Úloha FoL.33 ... planeta Fykosie

Fykosie je zatím neobjevená planeta naší sluneční soustavy. Zkuste určit její polohu, a to tak, že vypočítáte její poloměr r a vzdálenost od Slunce a. Do výsledku zapište poměr a/r jako násobek π. V této úloze můžeme použít aproximaci, že trajektorie planet jsou kružnice a Slunce je jejich společný střed. Oběžná doba Fykosie okolo Slunce je $T = 3\sqrt{3}\,\mathrm{yr}$, hustota Fykosie je $\varrho = 5\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Na těleso o hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$ působí na povrchu Fykosie gravitační sila $F_G = 69\,\mathrm{N}$. Gravitační konstanta je $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$.

Fykosie, moje rodná zem.

Podľa tretieho Keplerovho zákona platí

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_\mathrm{Z}^2}{a_\mathrm{Z}^3}\,,$$

kde $T_\mathrm{Z} = 1\,\mathrm{yr}$ je obežná doba Zeme okolo Slnka a $a_\mathrm{Z} = 1\,\mathrm{AU}$ je vzdialenosť stredu Zeme od stredu Slnka. Z tohto vzťahu dostaneme

$$a = \left(\frac{T}{T_\mathrm{Z}}\right)^{2/3} a_\mathrm{Z}\,.$$

Podľa Newtonovho gravitačného zákona platí

$$F_\mathrm{G} = G\frac{Mm}{r^2}\,,$$

kde M je hmotnosť Fykosie a pre ňu platí

$$M = V\varrho = \frac{4}{3}\pi\varrho r^3\,.$$

Po dosadení do gravitačného zákona a premenení jednotiek dostaneme vzťah

$$r = \frac{3F_\mathrm{G}}{4\pi\varrho Gm}\,.$$

Hľadaný pomer je $a/r \doteq 2\,900\pi$.

Marek Martaus
martaus@fykos.cz

Úloha FoL.34 ... jako pírko

Jste pozorovatelem na severním pólu galaxie Fykopaedie a pozorujete-li ji, otáčí se ve směru hodinových ručiček. Jako bystří pozorovatelé identifikujete střed galaxie a jednu hvězdu na samém okraji galaxie, která kolem středu obíhá po kruhové dráze. Čára vodíku, která má standardně vlnovou délku $\lambda_{emit} = 587{,}49\,\mathrm{nm}$, *má u této hvězdy kvůli (kolmému relativistickému Dopplerovu) rudému posuvu vlnovou délku* $\lambda_{obs} = 589{,}89\,\mathrm{nm}$. *Od středu Fykopaedie je vzdálená* $r = 7\,500\,\mathrm{pc}$. *Jaká je hmotnost Fykopaedie, pokud jednotkou je hmotnost Slunce? Zanedbejte vliv temné hmoty a energie. Také neuvažujte žádné další posuvy ve frekvenci než výše popsaný a předpokládejte, že je v galaxii hmotnost rozložena sféricky symetricky.*

f(Aleš) měl těžký batoh.

Ze vzdálenosti od středu galaxie a rychlosti oběhu můžeme určit oběžnou dobu. Následně již můžeme využít třetího Keplerova zákona k výpočtu hmotnosti. Tato hmotnost tedy bude dána jako

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{rv^2}{G}\,,$$

kde v je rychlost oběhu a G je gravitační konstanta. Potřebujeme tedy ještě určit onu rychlost oběhu. Tu určíme z rudého posuvu, platí pro něj vzorec

$$\frac{\lambda_\mathrm{obs}}{\lambda_\mathrm{emit}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

Odtud vyjádříme rychlost jako

$$v^2 = c^2\left(1 - \left(\frac{\lambda_\mathrm{emit}}{\lambda_\mathrm{obs}}\right)^2\right)$$

a dosadíme do vztahu pro hmotnost

$$M = \frac{rc^2\left(1 - \left(\frac{\lambda_\mathrm{emit}}{\lambda_\mathrm{obs}}\right)^2\right)}{G}\,.$$

Číselně dostaneme přibližně $M \doteq 2{,}5\cdot 10^{45}\,\mathrm{kg} \doteq 1{,}3\cdot 10^{15}\,M_\mathrm{S}$, kde jsme použili $M_\mathrm{S} = 1{,}99\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ a $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha FoL.35 ... urychlená

V synchrotronu letí proton s celkovou energií $E_\mathrm{p} = 1{,}00\,\mathrm{GeV}$ a střetne se s alfa částicí, která má celkovou energii $E_\alpha = 3{,}75\,\mathrm{GeV}$. Klidová hmotnost protonu je $m_\mathrm{p} = 0{,}938\,\mathrm{GeV}/c^2$, klidová hmotnost alfa částice $m_\alpha = 3{,}727\,\mathrm{GeV}/c^2$. Určete poměr rychlostí částic v_p/v_α před srážkou.

Mirek má rád výsledky blízké matematickým konstantám.

Celková energie částice je podle principů speciální teorie relativity dána vztahem

$$E = \gamma mc^2 \,.$$

Rychlost částice je skryta v Lorentzově faktoru

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,.$$

Po rozepsání faktoru osamostatníme rychlost

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} \,.$$

Hledaný poměr rychlostí je potom

$$\frac{v_\mathrm{p}}{v_\alpha} = \frac{E_\alpha}{E_\mathrm{p}}\sqrt{\frac{E_\mathrm{p}^2 - (m_\mathrm{p}c^2)^2}{E_\alpha - (m_\alpha c^2)^2}} \doteq 3{,}13 \,.$$

Hledaný poměr rychlosti alfa částice a protonu tedy je 3,13.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.36 ... odpor naruby

Chceme sestavit obvod s odporem $R = (57\,688/1\,807)\,\Omega$, ale máme k dispozici jen rezistory s odporem $r = 1\,\Omega$. Navíc chceme obvod sestavit tak, že k existující části obvodu (začínáme s jedním rezistorem) vždy připojíme jen jeden rezistor sériově nebo paralelně. Jaký nejmenší počet rezistorů na to celkem potřebujeme?

Xellos si vzpomněl na fyzikálně motivovanou úlohu z programátorské soutěže.

Pri sériovom zapojení vyrobíme z odporu $R/r = a/b$ odpor $(a+b)/b$, pri paralelnom zasa $a/(b+a)$. Naopak povedané: odpor a/b môžeme vyrobiť len z odporu $(a-b)/b$ (ak $a \geq b$) alebo $a/(b-a)$ (ak $b > a$). Počet rezistorov je teda presne daný a môžeme ho určiť ako počet odrátaní čitateľa od menovateľa alebo naopak. Na $a/b = 0$ sa dostaneme 68 krokmi.

Rýchlejší postup využíva, že pomer a/b vytvoríme rovnakým počtom krokov P ako pomer b/a, tj.

$$P\left(\frac{a}{b}\right) = P\left(\frac{b}{a}\right) \,,$$

a pre $a \geq b$ platí

$$P\left(\frac{a}{b}\right) = \left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor + P\left(\frac{a \bmod b}{b}\right) \,.$$

Výsledok dostaneme ako $31 + 1 + 12 + 3 + 2 + 19 = 68$.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FoL.37 ... nomen omen

Imperátorovi se na srazu největších záporáků všichni smáli, že má jeho Hvězda smrti v názvu „hvězda“, ale přitom vůbec nesvítí. To si samozřejmě nemohl nechat líbit, takže po návratu ze srazu vše napravil. Hvězda nyní svítí jako šedé těleso s emisivitou $\varepsilon = 0{,}8$ na všech vlnových délkách. (Emisivita je poměr intenzity vyzařování reálného tělesa k intenzitě vyzařování černého tělesa o stejné teplotě.) Poloměr Hvězdy je $r = 450\,\mathrm{km}$ a ve vzdálenosti $d = 10\,000\,\mathrm{km}$ byla na průzkumné lodi naměřena intenzita záření $I = 33\,\mathrm{kW{\cdot}m^{-2}}$. Na jaké vlnové délce (v nanometrech) Hvězda vyzařuje s největší intenzitou? Stefan-Boltzmannova konstanta je $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$, Wienova konstanta je $b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m{\cdot}K}$.

Mirek soudil, že úloh se SW tematikou není nikdy dost.

Intenzita záření klesá se čtvercem vzdálenosti, Stefan-Boltzmannův zákon proto napíšeme ve tvaru

$$I(d/r)^2 = \varepsilon\sigma T^4\,.$$

K výpočtu vlnové délky, na které Hvězda vyzařuje s nejvyšší intenzitou, pak už jen stačí dosadit do Wienova posunovacího zákona

$$\lambda_{\mathrm{max}} = \frac{b}{T} = \frac{b}{\sqrt[4]{d^2 I/(\varepsilon\sigma r^2)}} \doteq 666\,\mathrm{nm}\,.$$

Hvězda vyzařuje s nejvyšší intenzitou na vlnové délce 666 nm.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.38 ... kyvadlo

Byla jednou jedna nekonečná supravodivá vodorovná rovina s plošnou hustotou (hmoty, ne náboje) $\sigma = 2 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$ a nad ní ve vzdálenosti $d = 5\,\mathrm{m}$ háček. Na háček jsme zavěsili elektron na šňůrce délky $l = 1\,\mathrm{m}$. Jaká bude perioda (v sekundách) malých kmitů elektronu okolo rovnovážné polohy?

Předpokládejte, že náboj se může po vodivé rovině přemisťovat libovolnou rychlostí. Magnetické pole zanedbejte. *Xellos a jeho elektron na vodítku.*

Elektrón môžeme považovať za bodový náboj $-e$ s hmotnosťou m_e. Pôsobia naňho dve sily, obe (zo symetrie) nadol kolmo k rovine: elektrostatická F_e a tiažová $F_\mathrm{g} = m_\mathrm{e} g$.

Tiažové zrýchlenie g určíme z Gaussovho zákona. Intenzita poľa je gravitačná sila delená hmotnosťou, teda práve tiažové zrýchlenie. Ďalej vieme, že v Gaussovom zákone vystupuje na pravej strane obrátená hodnota permitivity $1/\varepsilon_0$. Porovnaním konštánt v Newtonovom vzťahu pre veľkosť gravitačnej sily a v Coulombovom vzťahu pre veľkosť elektrostatickej sily zistíme, že $1/\varepsilon_0$ musíme nahradiť výrazom $4\pi G$. Gaussov zákon pre gravitačné pole má teda tvar

$$\oint_{\partial V} g\,\mathrm{d}S = 4\pi G m\,,$$

kde m je hmotnosť uzavretá v objeme V. Vhodnou voľbou Gaussovej plochy získame

$$g = 2\pi G\sigma\,.$$

Pre výpočet sily F_e elektrického poľa využijeme zrkadlenia – ak je elektrón vo výške h nad doskou, pôsobí naňho rovnaké F_e, ako keby sa namiesto dosky nachádzal „zrkadlový“ náboj $+e$ vo vzdialenosti h pod doskou. Z Coulombovho zákona potom platí

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2}\,.$$

Pri malých kmitoch sa vzdialenosť $h \approx d - l$ prakticky nemení, môžeme teda uvažovať, že na elektrón pôsobí konštantná sila $F = F_e + F_g \doteq 1{,}12 \cdot 10^{-29}$ N. Pri výchylke o uhol α z rovnovážnej (zvislej) polohy vracia guľôčku naspäť moment sily $\tau \approx Fl\alpha$. Moment zotrvačnosti elektrónu voči háčiku je $I = m_e l^2$, pre uhlovú frekvenciu kmitov ω a periódu T teda platí

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\tau}{I\alpha} = \frac{F}{m_e l}\,,$$

z čoho $T = 2\pi\sqrt{m_e l/F} \doteq 1{,}8\,\mathrm{s}$.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FoL.39 ... magnetické zaostřování

Z jednoho bodu na ose x vystřelíme svazek protonů. Každý proton má rychlost $v = 10^5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, která se od osy x vychyluje maximálně o úhel $\Delta\alpha = 1^\circ$. Ve směru osy x působí elektrické pole $E = 12\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}$ a magnetické pole $B = 1\,\mathrm{mT}$. Všechny protony opět dopadnou na osu x ve vzdálenostech z intervalu $(L, L + \Delta L)$. Určete poměr $(\Delta L)/L$. Neuvažujte protony vyletující po ose x. *Xellos hrál Bang.*

Uvažujme najprv len jednu časticu s hmotnosťou m a nábojom q, vychýlenú α od osi x. Jej rýchlosť v smere kolmom na os x je konštantné $v_\perp = v \sin\alpha$, bude teda opisovať v rovine yz kružnicu s polomerom

$$R = \frac{v_\perp m}{qB}\,,$$

a na os x sa vráti v čase

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}\,.$$

V smere osi x sa pohybuje s počiatočnou rýchlosťou $v_\parallel = v\cos\alpha$ a zrýchlením $a = Eq/m$, preto za čas T prejde dráhu

$$L = v_\parallel T + \frac{Eq}{2m}T^2 = \frac{2\pi m v_\parallel}{qB} + \frac{2\pi^2 mE}{qB^2}\,.$$

Je jasné, že $\Delta L = L(\alpha = 0) - L(\alpha = \Delta\alpha)$, keďže $\alpha \leq \Delta\alpha \ll 1$, platí $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ a

$$\Delta L \approx \frac{\pi m v(\Delta\alpha)^2}{qB}\,.$$

Hrubší odhad $\cos\alpha \approx 1$ dá

$$L \approx \frac{2\pi m v}{qB} + \frac{2\pi^2 mE}{qB^2}\,,$$

$$\frac{\Delta L}{L} \approx \frac{(\Delta\alpha)^2}{2 + \frac{2\pi E}{vB}} \doteq 1{,}1 \cdot 10^{-4}$$

($\Delta\alpha$ dosadzujeme v radiánoch). Poměr $\Delta L/L$ je $1{,}1 \cdot 10^{-4}$.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha FoL.40 ... práče

Projektil vystřelený z rekonstruovaného Cimrmanova Čakovického praku byl lehce předimenzován, a proto vzdor očekávání nedopadl v Čakovicích, ba nedopadl vůbec. Vysokou rychlostí proletěl zemskou atmosférou, pak pokračoval v průletu sluneční soustavou, Galaxií, Místní skupinou galaxií, Nadkupou galaxií v Panně,..., až dolétl za hranice známého vesmíru a ocitl se v novém univerzu. V něm platí stejné fyzikální zákony jako u nás s tím rozdílem, že mezi projektilem a ostatní hmotou působí gravitační síla z Newtonova zákona jako odpudivá interakce. Projektil se zrovna blíží k jednomu z místních sluncí. Kdyby pokračoval v přímém směru, minul by střed slunce ve vzdálenosti $b = 10^{10}$ m. Vlivem gravitačního působení však bude nutně odkloněn. Určete minimální vzdálenost, na kterou se ke slunci přiblíží (rozměry slunce neuvažujte), jestliže hmotnost projektilu je $m = 1\,\mathrm{kg}$, hmotnost slunce $M = 10^{30}\,\mathrm{kg}$ a rychlost projektilu mimo gravitační vliv slunce byla $v_0 = 10^5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Gravitační konstanta je $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$. Mirek přenesl Rutherfordův model na makroskopické škály.

Budeme postupovat stejně jako při výpočtu odchýlení alfa částice nalétávající na jádro zlata v Rutherfordově experimentu. Jedná se o planetární systém, zachovávají se moment hybnosti a mechanická energie. Tyto integrály pohybu vyjádříme v polárních souřadnicích a položíme je rovny jejich počátečním hodnotám

$$L = mv_0b = mr^2\dot{\varphi}\,,$$
$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{GMm}{r}\,.$$

Časovou derivaci $\dot{\varphi}$ vyjádříme pomocí momentu hybnosti, dosadíme do vztahu pro energii

$$v_0^2 = \left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) + \frac{2GM}{r}\,.$$

a položíme radiální rychlost $\dot{r}$ rovnu nule, což určuje polohu, kdy se projektil již nepřibližuje.

$$v_0^2 - \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2} = 0\,.$$

Dosadíme velikost momentu hybnosti na počátku a z kvadratické rovnice vyjádříme minimální vzdálenost (musíme vybrat správný kořen)

$$r_{\min} = \frac{GM}{v_0^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{v_0^4} + b^2} \doteq 1{,}87 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}\,.$$

Projektil se k planetě přiblíží na minimální vzdálenost $1{,}87 \cdot 10^{10}$ m.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.41 ... dárečky

Po odubytování nechal Mirkův spolubydlící na koleji spoustu zajímavých věcí, mimo jiné desetimetrový provaz, 170 cm železnou tyč a tašku plnou dlažebních kostek. Uvažme následující situaci: Uvážeme provaz k jednomu konci tyče, na stejný konec připevníme tašku s kostkami a tyč potom vyhodíme z okna ve výšce $d = 11\,\mathrm{m}$ (provaz přitom pevně držíme na druhém konci). Tyč dopadne na chodník a opře se koncem bez tašky v místě přesně pod bodem, kde držíme provaz. Kolem místa dopadu se tyč může volně otáčet, nemůže se však posunout (nekonečné tření). Určete velikost síly, kterou je napínán provaz v rovnovážné poloze. Kostky váží $m_k = 8\,\mathrm{kg}$, tyč váží $m_t = 5\,\mathrm{kg}$ a tuhost provazu je $k = 200\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$. Hmotnost provazu zanedbejte.

A tu vozovku potom zkompletujte! (Mirek).

Označme délku tyče L, délku provazu l a zaveďme hmotnost

$$M = \frac{m_\mathrm{t}}{2} + m_\mathrm{k}\,.$$

Celková potenciální energie systému je potom

$$V = MgL\cos\alpha + \frac{k}{2}\left(\sqrt{L^2 + d^2 - 2dL\cos\alpha} - l_0\right)^2\,,$$

kde l_0 je klidová délka lana. První člen vyjadřuje tíhovou potenciální energii, druhý člen potenciální energii pružnosti $k(\Delta l)^2/2$. V rovnovážné poloze musí mít energie minimum, tedy

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha} = 0\,.$$

Potenciální energii poměrně přímočaře zderivujeme a z výsledku vyjádříme

$$l = \frac{l_0}{1 - Mg/kd}\,,$$

což dosadíme do Hookeova zákona

$$F = k(l - l_0) = \frac{kl_0}{kd/Mg - 1} \doteq 98{,}2\,\mathrm{N}\,.$$

V rovnovážné poloze je provaz napínán silou $F \doteq 98{,}2\,\mathrm{N}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.42 ... van de Graaff

Vodivou kouli s poloměrem $R = 7\,\mathrm{cm}$ nabitou na potenciál (vůči nekonečnu) $\varphi = -5\,\mathrm{V}$ a pokrytou tenkou vrstvou izolantu vložíme do ionizovaného helia He^+ tak, aby se na kouli nalepily ionty se zanedbatelnou kinetickou energií. Potom kouli vložíme do evakuované nádoby s objemem $V = 10\,\mathrm{m}^3$ a velmi rychle vybijeme. Jaká bude teplota (v kelvinech) vytvořeného iontového plynu v nádobě?

Xellos má rád elektrošoky.

Potenciál na guli, homogénne nabitej nábojom $-Q$, je rovnaký ako potenciál vo vzdialenosti R od rovnako veľkého bodového náboja

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

Na guľu sa nalepia (môžeme uvažovať, že sa nalepia spojito) ióny s rovnako veľkým celkovým nábojom, ako je na jej povrchu, aby guľa vyzerala navonok neutrálna a nepriťahovala ďalšie ióny.

Po vybití zanikne sila, ktorá ióny držala na povrchu gule, a tie sa vďaka elektrostatickému odpudzovaniu rozletia do priestoru. Priestor je veľký, preto môžeme uvažovať, že sa všetka potenciálna energia premení na kinetickú. Tá súvisí s teplotou podľa vzťahu

$$E_\mathrm{k} = \frac{3}{2} k_\mathrm{B} T \,.$$

Potrebujeme teda spočítať elektrostatickú energiu pripadajúcu na jeden ión. Napríklad tak, že budeme polomer vodivej šupky s nábojom Q zväčšovať a zistíme prácu, ktorú pri tom na ión vykoná elektrická sila – tá je rovná rozdielu energií a elektrostatická energia v nekonečne je nulová.

Aká el. intenzita pôsobí na malú plôšku $\mathrm{d}S$ spojito rozloženého náboja na guli s polomerom r? Na povrchu gule je (zo symetrie a Gaussovho zákona) intenzita

$$E_\mathrm{g} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,,$$

od čoho musíme odrátať intenzitu E_s, ktorou pôsobí plôška sama na seba. Plôška je malá, preto ju môžeme považovať za nízky valec a (zasa z Gaussovho zákona)

$$E_\mathrm{s} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r^2} \,,$$

na ión s nábojom $+e$ teda pôsobí sila

$$F = e(E_\mathrm{g} - E_\mathrm{s}) = \frac{eQ}{8\pi\varepsilon_0 r^2} \,.$$

Prácu určíme ako integrál

$$W = \int_R^\infty F \mathrm{d}r = \frac{eQ}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

a z toho teplotu

$$T = \frac{2W}{3k_B} = \frac{eQ}{12\pi\varepsilon_0 R k_B} = \frac{-e\varphi}{3k_B} \doteq 19\,300\,\mathrm{K} \,.$$

Plyn v nádobe bude mať teplotu $T \doteq 19\,300\,\mathrm{K}$.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha M.1 ... elektrický nákupní košík

Fykosáci jsou líní, a tak plánují samohybné příruční nákladní vozidlo. Ještě je potřeba vyřešit pohon. Již se zjistilo, že při své hmotnosti $m = 70\,\mathrm{kg}$ se po rovině rozjede se zrychlením $a = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Určete, s jakým (stálým) zrychlením proběhne rozjezd do kopce se stoupáním $10\,\%$, pokud bude vozidlo poháněno stejnou tahovou silou. Tíhové zrychlení uvažujte jako $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *f(Aleš) vezl odměny přes celou budovu.*

Stoupání určuje úhel stoupání vztahem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{10}\,.$$

Zrychlení do kopce a_s vypočteme jako

$$a_\mathrm{s} = \frac{F_\mathrm{s}}{m}\,.$$

Již nám tedy stačí vyjádřit, jak se změní velikost síly ve směru stoupání F_s oproti velikosti síly F_v, kterou bylo vozidlo poháněno na vodorovném povrchu

$$F_\mathrm{s} = F_\mathrm{v} - F_G = ma_\mathrm{v} - mg\sin\alpha\,,$$

protože navíc působí sinová složka tíhové síly, která vozidlo brzdí. Celkově tedy

$$a_\mathrm{s} = a_\mathrm{v} - g\sin\alpha\,.$$

Číselně vyjde $a_\mathrm{s} \doteq 0{,}024\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha M.2 ... Náryho akademická čtvrthodinka

Většina lidí na věci reaguje téměř okamžitě, ale ne tak Náry. Proto i při pouhém pouštění věcí volným pádem má prodlevu $\tau = 6\,\mathrm{s}$. Jak dlouho (v sekundách) bude trvat, než bude vzdálenost mezi jeho tělesem a tělesem vypuštěným okamžitě $l = 200\,\mathrm{m}$? Čas začínáme měřit v okamžiku vypuštění prvního tělesa. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

f(Aleš) kouká, jak Náry jde zase pozdě a ještě mu něco padá...

Čas pádu prvního tělesa označme jako t, pak čas pádu Náryho tělesa bude $t - \tau$. Dráhy, které tělesa urazí, jsou

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2\,,$$
$$s_\mathrm{N}(t) = \frac{1}{2}g\left(t-\tau\right)^2\Theta(t-\tau)\,,$$

kde Θ je tzv. skoková funkce, nulová pro záporný argument a nabývající hodnoty 1 v ostatních případech. Vzdálenost $l = s - s_\mathrm{N}$ mezi tělesy je v našem případě větší než $s(\tau)$, tedy $t > \tau$, proto

$$l = g\tau\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)\,.$$

Hledaný čas je

$$t = \frac{l}{g\tau} + \frac{\tau}{2}\,.$$

Číselně vyjde $t \doteq 6{,}4\,\mathrm{s}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha M.3 ... těžká skripta, těžká

Některé učebnice nejsou z nejlehčích, a tak jsme se rozhodli vyzkoušet nenosit je v batohu, ale tahat po zemi na provázku. Učebnice je přivázaná ve svém středu na horních deskách a neotevírá se. Provázek má délku $l = 2{,}0\,\mathrm{m}$ a jeho konec je držen ve výšce $h = 1{,}2\,\mathrm{m}$. Určete koeficient tření, pokud víte, že učebnice o hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$ je tažena konstantní rychlostí silou $F = 5\,\mathrm{N}$. Tíhové zrychlení uvažujte jako $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. *f(Aleše) trápí zavazadla.*

Koeficient tření můžeme spočíst jako podíl třecí a normálové síly. Třecí síla F_t musí být stejná jako horizontální (x-ová) složka síly $\boldsymbol{F}$; ta je dána jako

$$F_x = F\cos\alpha = F\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}\,.$$

Úhel α je ten, který svírá kniha, ležící na zemi, s provazem. K jeho vyjádření jsme použili Pythagorovu větu a vyjádření funkce kosinus v pravoúhlém trojúhelníku.

Normálovou sílu pak spočteme jako tíhu knihy zmenšenou o nadzdvihávání vertikální (y-ovou) složkou síly $\boldsymbol{F}$, tedy

$$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} - F_y = mg - F\sin\alpha = mg - F\frac{h}{l}\,.$$

Koeficient tření f je potom

$$f = \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{N}} = \frac{F\sqrt{l^2 - h^2}}{mgl - Fh}\,.$$

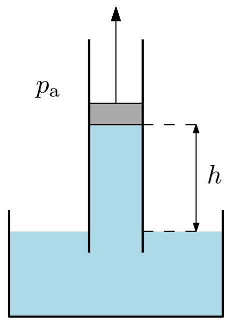
Číselně dostaneme $f \doteq 0{,}59$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha M.4 ... marná snaha

Do nádoby s vodou je ponořena trubice, ve které je píst, který dokonale přiléhá ke stěnám trubice. Z pístu vytlačíme vzduch a začneme jej zvedat se sloupcem vody v trubici. Do jaké výšky h můžeme vodu vyzdvihnout (nemusí se tam udržet), pokud je atmosférický tlak $p_\mathrm{a} = 760\,\mathrm{mmHg}$? *f(Alešovi) docházela voda.*

Voda bude s pístem stoupat, dokud se nevyrovná tlak vytvářený vodou v trubici s tlakem atmosférickým. Stačí nám tedy tlak zadaný v délce rtuti násobit její hustotou a dělit hustotou vody. Hustota rtuti je $13\,595\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, hustota vody je přibližně $1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Tedy výška, ve které se sloupec utrhne, je $h \doteq 10{,}3\,\mathrm{m}$.



Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha E.1 ... Dlouhý a Široký

Dva homogenní válcovité měděné dráty mají stejnou hmotnost, jeden z nich je však třikrát delší. Jaký je poměr elektrického odporu delšího drátu ku kratšímu? Lukáš krade ve škole.

Elektrický odpor můžeme na základě rezistivity ϱ, délky drátu l a jeho průřezu S spočítat jako

$$R = \frac{\varrho l}{S}\,.$$

Podíl délek je 3. Mají-li dráty stejnou hmotnost, musí mít stejný objem, a tedy podíl průřezů je 1/3. Protože je průřez ve jmenovateli, máme celkem podíl 9. Odpor delšího drátu je devětkrát větší.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha E.2 ... jedna, dva, tři,...

Náry dostal cívku, ale s ní i zákeřný úkol – spočítat, kolik má závitů. Po jednom se mu nechtělo, a tak vzal do ruky měřící přístroje a tabulky. Změřil, že při napětí $U = 7{,}8\,\mathrm{V}$ prochází proud $I = 2\,\mathrm{A}$. Průřez drátu pak určil jako $S = 1\,\mathrm{mm}^2$. V tabulkách si pak našel, že měrný elektrický odpor mědi je $\varrho = 1{,}8 \cdot 10^{-7}\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}$. Střední průměr závitu změřil a získal $d = 6\,\mathrm{cm}$. Přívodní vodiče k cívce mají dohromady délku $l_0 = 18\,\mathrm{cm}$. Kolik má tedy cívka závitů?
f(Aleš) uvažoval nad černou krabičkou, ze které se stala cívka.

Z Ohmova zákona můžeme určit odpor vodiče, který závisí lineárně na délce vodiče. Z této délky pak již snadno spočteme kolikrát obtočí cívku.

$$N = \frac{l - l_0}{2\pi\frac{d}{2}} = \frac{\frac{RS}{\varrho} - l_0}{\pi d} = \frac{\frac{US}{I\varrho} - l_0}{\pi d}\,.$$

Když dosadíme číselně, máme $N \doteq 114$. Zájemci si mohou dopočíst, že stoupání vinutí by se na počtu závitů projevilo až ve třetím desetinném místě a mohli jsme ho proto zanedbat.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha E.3 ... experimentální odpoledne

Na objektu soustředění FYKOSu jsou zásuvky pod napětím $U_0 = 230\,\mathrm{V}$. Některé experimenty, zvláště ty se vzduchovkou, je však potřeba provádět venku. Elektrické vedení tam bylo dovedeno prodlužovacím kabelem o délce $l = 101\,\mathrm{m}$. Toto vedení má odpor $R_0 = 1{,}4\,\Omega$. Připojený spotřebič má při napětí $U_s = U_0$ výkon $P_s = 1\,000\,\mathrm{W}$. Jaké bude skutečné napětí na přístroji (kupříkladu topné spirále)? f(Aleš) čte úlohy a vzpomíná na soustředka.

Celý obvod jsou vlastně dva spotřebiče, jeden tvoří přístroj a druhý přívodní vodič. Oběma teče stejný proud, pro který z Ohmova zákona platí

$$I = \frac{U_0}{R_0 + R_\mathrm{s}}\,,$$

kde R_s je odpor přístroje. Tento proud se musí rovnat podílu napětí a odporu na přístroji

$$I = \frac{U}{R_\mathrm{s}}\,.$$

Když je porovnáme, můžeme vyjádřit hledané napětí U. Ještě neznáme odpor přístroje. Můžeme ho však spočítat ze znalosti výkonu při daném napětí. Pro něj platí

$$P_\mathrm{s} = \frac{U_0^2}{R_\mathrm{s}}\,.$$

Sloučením obou rovnic po úpravě dostaneme

$$U = \frac{U_0}{1+\frac{R_0}{R_\mathrm{s}}} = \frac{U_0^3}{U_0^2 + R_0 P_\mathrm{s}}\,.$$

Po číselném dosazení máme $U \doteq 224\,\mathrm{V}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha E.4 ... obvody pyramidy 1

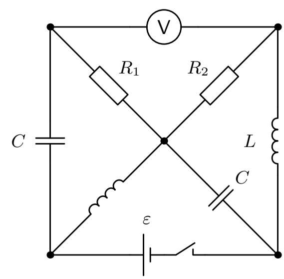
V obvodu na obrázku jsme zapnuli spínač a počkali, až se proudy v obvodu ustálí. Jaké napětí (ve voltech, v absolutní hodnotě) změří voltmetr? Kondenzátory a cívky považujte za ideální, odpor voltmetru považujte za nekonečný, $\varepsilon = 1\,\mathrm{V}$. Odpor $R_1 = 3R_2$.

Xellos objevil estonsko-finskou fyzikální olympiádu.

Po ustálení sa kondenzátory (diera v kábli) a voltmeter správajú ako vodiče s nekonečným odporom. Cievka je len vodič s nulovým odporom. Rezistorom R_1 preto prechádza prúd $I_1 = 0$ a rezistorom R_2 prúd $I_2 = \varepsilon/R_2$. Zmena napätia cez rezistory je

$$|R_1 I_1 - R_2 I_2| = \varepsilon\,.$$

Na voltmetri nameriame napätie 1 V.



Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha X.1 ... neurčitá nákaza

Vyjděte z kvantových relací neurčitosti a vypočtěte neurčitost Δv_x, se kterou stanovíme složku rychlosti bakterie v_x, jestliže bakterie váží $m = 1{,}0\cdot 10^{-15}\,\mathrm{kg}$, má rozměr $l = 1{,}0\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$, její polohu dokážeme určit s přesností $\Delta x = l/100$ a její rychlost je $v_x = 3{,}0\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jako výsledek uveďte $\log_{10}(\Delta v_x/v_x)$.

Mirek přemýšlel, proč je tak těžké určit původ některých nemocí.

Heisenbergovu relaci neurčitosti svazující polohu a hybnost

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}\,,$$

přepíšeme do tvaru

$$\Delta x \Delta v_x = \frac{\hbar}{2m}$$

a vyjádříme hledaný poměr

$$\log_{10} \frac{\Delta v_x}{v_x} = \log_{10} \frac{\hbar}{2m \Delta x v_x} \doteq -7\,.$$

Nepřesnost v určení rychlosti je řádu 10^{-7}.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha X.2 ... přednáška z relativity

Na chodbě Ústavu teoretické fyziky se minou dva profesoři. První se vrací z přednášky o speciální teorii relativity rychlostí $v_s = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, druhý pospíchá na přednášku z obecné teorie relativity rychlostí $v_o = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete, jaké chyby se dopustíme, pokud budeme rychlost míjení v soustavě prvního profesora počítat klasicky namísto relativistického výpočtu.

Mirek si krátil čekání na přednášku z relativity.

Podle klasického sčítání rychlostí bude vzájemná rychlost obou profesorů

$$u = v_\mathrm{s} + v_\mathrm{o}\,,$$

zatímco podle relativistického skládání rychlostí platí

$$w = \frac{v_\mathrm{s} + v_\mathrm{o}}{1 + \frac{v_\mathrm{s} v_\mathrm{o}}{c^2}}\,.$$

Při nezapočtení relativistického efektu se tedy dopustíme odchylky

$$u - w = (v_\mathrm{s} + v_\mathrm{o}) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{v_\mathrm{s} v_\mathrm{o}}{c^2}} \right) = (v_\mathrm{s} + v_\mathrm{o}) \frac{1}{\frac{c^2}{v_\mathrm{s} v_\mathrm{o}} + 1} \approx \frac{v_\mathrm{s} v_\mathrm{o} (v_\mathrm{s} + v_\mathrm{o})}{c^2} \doteq 6{,}7 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Chyba způsobená uvažováním klasické teorie je $6{,}7 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha X.3 ... horká mříž

Určete, při jaké teplotě budeme pozorovat difrakci monoenergetického svazku (vyrobeného energetickým filtrem) $^{20}\mathrm{Ne}$ na mřížce s mřížkovou konstantou $d = 0{,}5\,\mathrm{nm}$, jestliže pro pozorovatelnost difrakce klademe podmínku na de Broglieho vlnovou délku neonu $\lambda = d$.

Mirek prolistovával učebnice kvantové fyziky.

Kinetická energie jednoatomových částic je

$$E = \frac{3}{2} kT\,,$$

kde $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$ je Boltzmannova konstanta. S uvážením de Broglieho vztahu

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

můžeme psát

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}\,,$$

kde m je hmotnost neonu, kterou určíme jako součin atomové hmotnostní jednotky $a_\mathrm{u} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ s relativní hmotností neonu $A_\mathrm{Ne} = 20$. Zbývá tedy vyjádřit teplotu

$$T = \frac{h^2}{3mkd^2} \doteq 1{,}3\,\mathrm{K}\,.$$

Teplota potřebná k pozorování difrakce je $T \doteq 1{,}3\,\mathrm{K}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha X.4 ... beta rozpad

Mějme svazek letících neutronů, kde každý neutron má kinetickou energii $E_\mathrm{k} = 0{,}05\,\mathrm{eV}$. Poločas rozpadu neutronu je $T_{1/2} = 640\,\mathrm{s}$, klidová energie neutronu je $m_n c^2 = 940\,\mathrm{MeV}$. Jaká část neutronů se rozpadne, než svazek urazí vzdálenost $d = 10\,\mathrm{m}$?

Mirek se inspiroval učebnicí částicové fyziky.

Zjevně platí $m_\mathrm{n} c^2 \gg E_\mathrm{k}$, úlohu proto můžeme řešit klasicky. Rychlost částice je potom

$$v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m_\mathrm{n}}}$$

a dráhu d urazí za čas

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{c}\sqrt{\frac{m_\mathrm{n} c^2}{2E_\mathrm{k}}}\,.$$

Nyní stačí aplikovat rozpadový zákon ve tvaru

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-(t \ln 2)/T_{1/2}}$$

a určit poměr neutronů, které podlehnou rozpadu, jako

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \mathrm{e}^{-(t \ln 2)/T_{1/2}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{d \ln 2}{T_{1/2} c}\sqrt{\frac{m_\mathrm{n} c^2}{2E_\mathrm{k}}}} \approx \frac{d \ln 2}{T_{1/2} c}\sqrt{\frac{m_\mathrm{n} c^2}{2E_\mathrm{k}}} \doteq 3{,}5 \cdot 10^{-6}\,.$$

Rozpadne se $3{,}5 \cdot 10^{-6}$ z celkového počtu neutronů.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.