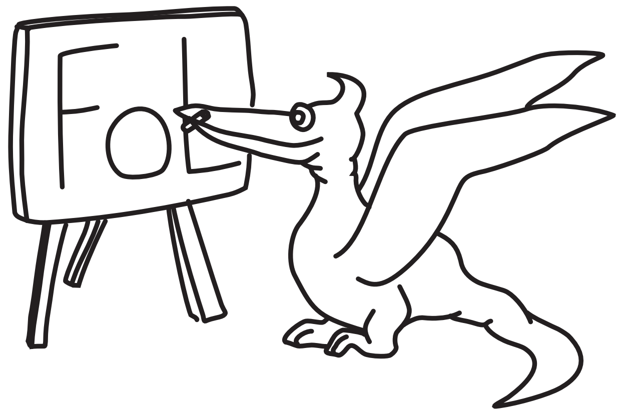
Řešení úloh 5. ročníku Fyziklání online



Úloha FoL.1 ... zlobiví studenti

Z dvacátého patra na vzdálené planetě pustí studenti předmět z okna, které je $h = 40\,\mathrm{m}$ nad povrchem. Tento předmět dopadne na povrch za $t = 4\,\mathrm{s}$. Kolik váží předmět na Zemi, když víme, že tíhová síla na této planetě působící na předmět je $F = 55\,\mathrm{N}$? Předpokládejte homogenní tíhové pole na obou planetách. Neuvažujte odpor vzduchu.

Olda měl při Náryho vaření hodně času na přemýšlení.

Všemu musí předcházet úvaha, že hmotnost tělesa je nezávislá na jeho umístění v prostoru, proto je naší první úlohou spočíst tíhové zrychlení na vzdálené planetě a pak přes Newtonův zákon síly spočítat dotazovanou hmotnost.

Rovnice pro volný pád v případě neznámého tíhového zrychlení a vypadá následovně

$$h = \frac{1}{2}at^2 \,.$$

Přímočarou úpravou vyjádříme a

$$a = \frac{2h}{t^2} = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \,.$$

Nyní už jen pro získání hmotnosti vydělíme sílu $F = 55\,\mathrm{N}$ tíhovým zrychlením a máme

$$m = \frac{F}{a} = \frac{Ft^2}{2h} = 11\,\mathrm{kg} \,.$$

Puštěný předmět váží 11 kg.

Oldřich Holcner
`holcner@fykos.cz`

Úloha FoL.2 ... přilepený kvádřík

Kuba se chvástá, že dokáže položit dokonale hladký kvádřík na nakloněnou desku, aniž by předmět sklouzl. Deska svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 20^\circ$. Určete, s jak velkým zrychlením se musí Kuba s deskou rozběhnout, aby se kvádřík nepohyboval.

Mirek na takové hloupé triky dávno nevěří...

Jde o jednoduchý silový rozbor. Na kvádřík působí svisle dolů tíhová síla mg, kde m je hmotnost kvádříku a g tíhové zrychlení. Do směru sklonu desky se tato síla promítne jako $mg\sin\alpha$. Kubovo zrychlení $\boldsymbol{a}$ se projeví na kvádříku jako reakční síla ma ve vodorovném směru proti Kubovu zrychlení. Průmět proti sklonu desky je $ma\cos\alpha$. Kvádřík se nebude pohybovat, pokud budou průměty obou sil v rovnováze, tedy

$$mg\sin\alpha = ma\cos\alpha \,,$$

z čehož vyjádříme

$$a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha \,.$$

Po dosazení $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ dostaneme číselný výsledek $a = 3{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.3 ... válíme

Komolý kuželík se valí po stole tak, že bod na obvodu menší podstavy se vůči jejímu středu pohybuje rychlostí $v_1 = 1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a bod na obvodu větší podstavy rychlostí $v_2 = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (opět vůči středu). Délka strany je $l = 0{,}1\,\mathrm{m}$. Za jakou dobu se kuželík vrátí do stejného bodu, odkud vyšel? *Tomovi spadl tlouček...*

Větší podstava opisuje svým pohybem kružnici o poloměru $R = l + L$, kde L jsme označili délku strany kuželu, který bylo třeba seříznout z celého kuželu, aby vznikl náš komolý. Obě podstavy se otáčí stejnou úhlovou rychlostí, tedy

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}\,,$$

odkud vyjádříme

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_1}{v_2}\,.$$

Dále z podobnosti trojúhelníků máme

$$\frac{r_2}{L} = \frac{r_1}{L + l}\,,$$

tedy

$$1 + \frac{l}{L} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{v_1}{v_2}\,.$$

Tedy pro neznámou L můžeme psát

$$L = \frac{l}{\frac{v_1}{v_2} - 1}\,.$$

Do stejného bodu kužel dospěje, když větší podstava objede po podložce celou kružnici o poloměru $R = L + l$, tedy za dobu

$$t = \frac{2\pi(L + l)}{v_1} = \frac{2\pi l}{v_1}\left(1 + \frac{1}{\frac{v_1}{v_2} - 1}\right) \doteq 1{,}26\,\mathrm{s}\,.$$

Kuželík se do stejného bodu za $t \doteq 1{,}26\,\mathrm{s}$.

Tomáš Fiala
`tomas.fiala@fykos.cz`

Úloha FoL.4 ... chladenie

Mějme Peltierův článek s chladicím výkonem $P = 10\,\mathrm{W}$, umístěný na zápěstí člověka. Uvažujme, že celý výkon chladí krev protékající žilou s objemovým průtokem $Q = 1{,}6\,\mathrm{ml\cdot s^{-1}}$. Hustota krve je $\varrho = 1\,025\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, tepelná kapacita $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. O kolik se sníží teplota krve po průtoku zápěstím? *Filip musel v lete improvizovať.*

Hmotnostný prietok krvi žilou je ϱQ. Vyjadríme chladiaci výkon ako odvedené teplo za element času,

$$c\varrho Q \varDelta t = P\,,$$

$$\varDelta t = \frac{P}{c\varrho Q}\,,$$

z čoho $\Delta t \doteq 1{,}5\,^\circ\mathrm{C}$.

Filip Ayazi
`filip@fykos.cz`

Úloha FoL.5 ... mokrá vozovka

O kolik se prodlouží minimální brzdná dráha z rychlosti $v = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, při které auto ještě nedostane smyk, jestliže vozovka namokne? Součinitel statického smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami je v případě suché vozovky $f_1 = 0{,}55$ a v případě mokré vozovky pak $f_2 = 0{,}30$. Hmotnost auta je $m = 1\,500\,\mathrm{kg}$ a tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Uvažujte pouze kinetickou energii translačního pohybu auta. *Pikoš málem nestihl zastavit.*

Aby auto nedostalo smyk, nesmí síla, kterou je brzděno, překročit maximální velikost síly smykového tření, která je dána vztahem $F_\mathrm{t} = fF_\perp$, kde $F_\perp$ je síla, kterou auto působí kolmo na vozovku, v našem případě jde tedy o sílu rovnou tíhové, tedy $F_\perp = mg$, tudíž $F_\mathrm{t} = fmg$. Jestliže tato síla působí na dráze l, sníží energii auta o $\Delta E = fmgl$.

Kinetická energie auta je před započetím brzdění $E_\mathrm{k} = mv^2/2$, na konci je nulová, práce potřebná k zabrzdění auta je tedy $\Delta E = E_\mathrm{k}$. Odtud již můžeme vypočítat brzdnou dráhu

$$l = \frac{v^2}{2fg}\,.$$

Rozdíl brzdné dráhy při suché a při mokré vozovce je pak

$$\Delta l = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}\right) \doteq 48{,}3\,\mathrm{m}\,.$$

Brzdná dráha se tedy prodlouží asi o $48{,}3\,\mathrm{m}$, tedy téměř na dvojnásobek.

Tomáš Pikálek
`pikos@fykos.cz`

Úloha FoL.6 ... high five!

Tomáš s Michalem se potkají na cyklostezce a chtějí si za jízdy plácnout. Oba mají hmotnost $m = 70\,\mathrm{kg}$, jedou rychlostí $v = 8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a paži natáhnou vodorovně do vzdálenosti $l = 1\,\mathrm{m}$ od těžiště těla. Míjejí se paralelně v opačných směrech, jejich vzdálenost (vzdálenost jejich těžišť) při míjení je přesně $2l$. Určete, s jakou frekvencí (v Hz) by začali rotovat kolem společného středu, pokud by se při plácnutí chytili. Zanedbejte hmotnost bicyklů, cyklisty považujte při výpočtu za hmotné body. Energetické ztráty plácnutí jsou zanedbatelné.
Mirek málem pozdravil kolemstojící břízu.

Jelikož cyklisty považujeme za hmotné body, je zřejmé, že moment hybnosti a mechanická energie se zachovají, pokud bude obvodová rychlost každého cyklisty při rotaci odpovídat jejich translační rychlosti na počátku. Označíme-li si starý stav 0 a nový 1, platí pro energie E a momenty hybnosti L vztahy

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2\,,\\
E_1 &= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = I\omega^2 = ml^2\omega^2\,,\\
L_0 &= 2mvl\,,\\
L_1 &= 2m\omega l^2\,,
\end{aligned}
$$

kde jsme využili definici momentu setrvačnosti pro hmotný bod $I = ml^2$. Hledaná frekvence je

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi l} = 1{,}3\,\mathrm{Hz}\,.$$

S touto frekvencí budou cyklisté rotovat kolem svého společného středu, dokud nespadnou na zem (což nastane velmi rychle).

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.7 ... (ne)pokažený teploměr

Určitým teploměrem byla naměřena teplota tajícího ledu $t_0 = -0{,}3\,^\circ\mathrm{C}$ a teplota vodních par $t_\mathrm{v} = 101{,}4\,^\circ\mathrm{C}$. Jaká je skutečná teplota τ varu methylalkoholu za normálního tlaku, jestliže teploměr ukazuje teplotu $t = 65{,}5\,^\circ\mathrm{C}$? Předpokládejte, že skutečná teplota tajícího ledu je $\tau_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ a vodních par $\tau_\mathrm{v} = 100\,^\circ\mathrm{C}$. Předpokládejte, že počet dílků na pokaženém teploměru je přímo úměrný skutečné teplotě ve stupních Celsia. *Lydka sa hrala na praktiku z teplomerom.*

Zo zadaných hodnôt vyplýva, že teplotnému rozdielu $100\,^\circ\mathrm{C}$ zodpovedá na teplomeri 101,7 dielikov. Za vyššie spomenutého predpokladu, že kapilára teplomera je rozdelená dielikmi stupnice na rovnaké objemy, a že údaj na teplomeri je lineárnou funkciou zmeny teploty, dostaneme

$$\frac{\tau_\mathrm{v} - \tau_0}{\tau - \tau_0} = \frac{t_\mathrm{v} - t_0}{t - t_0}\,.$$

Teda pre $\tau_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ platí

$$\tau = \frac{t - \tau_0}{t_\mathrm{v} - t_0}\tau_\mathrm{v} = 64{,}7\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

To je ale tá istá teplota, akú by ukázal nepokazený teplomer.

Lýdia Janitorová
`janitorova@fykos.cz`

Úloha FoL.8 ... přímka apsid

Určete poměr rychlostí $v_\mathrm{p}/v_\mathrm{a}$ planety v periapsidě v_p (bod nejbližší hvězdě) a v apoapsidě v_a (bod nejvzdálenější hvězdě), víte-li, že naše terestrická planeta obíhá svoji mateřskou hvězdu podobnou Slunci tak, že ostatní tělesa ve vesmíru můžeme zanedbat a excentricita dráhy planety je $e = 0{,}150\,0$. *Karel na cvičišti.*

Vyjdeme z 2. Keplerova zákona, který nám říká, že plošná rychlost průvodiče je konstantní. Z toho získáme rovnici

$$v_\mathrm{a} r_\mathrm{a} = v_\mathrm{p} r_\mathrm{p}\,, \tag{1}$$

kde r_p je vzdálenost hvězdy od planety v periapsidě a r_a v apoapsidě. V periapsidě máme vzdálenost planety od ohniska, ve kterém se nalézá obíhaná hvězda, rovnu $r_\mathrm{p} = a\,(1-e)$, kdežto v apoapsidě máme vzdálenost od ohniska $r_\mathrm{a} = a\,(1+e)$ (to snadno nahlédneme z geometrie elipsy; a je délka hlavní poloosy). Dosazením do rovnice (1) a vyjádřením poměru dostáváme

$$\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}} = \frac{1+e}{1-e} \doteq 1{,}353\,.$$

Poměr rychlostí je 1,353.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FoL.9 ... the fire rises

Na jakou nejmenší teplotu (ve °C) musíme zahřát vzduch v balóně, aby se začal vznášet? Objem balónu je $V = 6\cdot 10^6\,\mathrm{l}$ a jeho hmotnost (bez vzduchu vevnitř) je $m = 700\,\mathrm{kg}$. Hustota vzduchu kolem balónu je $\varrho = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, atmosferický tlak $p = 101\,\mathrm{kPa}$. *Xellos banepostoval.*

Na to, aby sa balón začal vznášať, musí byť jeho hustota rovná hustote vzduchu. Objem balóna poznáme, môžeme teda vypočítať hmotnosť vzduchu v balóne m_v

$$\varrho = \frac{m + m_\mathrm{v}}{V} \quad\Rightarrow\quad m_\mathrm{v} = \varrho V - m = 6{,}5\,\mathrm{t}\,.$$

Pomocou stavovej rovnice ideálneho plynu vieme prepočítať hmotnosť vzduchu na teplotu (tlak v balóne je stále rovný atmosférickému)

$$T = \frac{pV}{Rn} = \frac{pVM_\mathrm{v}}{Rm_\mathrm{v}} = \frac{pVM_\mathrm{v}}{R\,(\varrho V - m)} = 325\,\mathrm{K}\,,$$

kde $M_\mathrm{v} = 28{,}97\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ je molová hmotnosť vzduchu. Táto teplota zodpovedá 52 °C.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FoL.10 ... sluníčková

Mirek se rozhodl udělat něco pro své zdraví, a vzal si proto učení ven na čerstvý vzduch. Bylo jasno a slunce se zrovna nacházelo přímo na jihu $\alpha = 50^\circ$ nad obzorem. Když Mirek položí učebnici vodorovně, dopadá na ni ze slunce světelný výkon P. Určete, o jaký nejmenší úhel β k sobě musí Mirek knihu přiklonit (dívá se na ni ze severu), aby výkon záření dopadajícího na knihu klesl na $P/2$. *Mirek měl moc bílý papír.*

Výkon je přímo úměrný ploše, na kterou záření dopadá. Má-li kniha obsah S_0, je jeho průmět do roviny kolmé na směr šíření paprsků roven

$$S_1 = S_0 \sin\alpha\,.$$

Hledáme takové

$$S_2 = S_0 \sin(\alpha - \beta)\,,$$

aby platilo

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}\,.$$

Tuto rovnici buďto vyřešíme numericky, nebo si vzpomeneme na součtové vzorce a zapíšeme ji ve tvaru

$$2 \sin \alpha \cos \beta - 2 \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha\,.$$

Nyní si jako proměnnou zvolíme $\sin \beta$, převedeme siny na pravou stranu, umocníme, převedeme kosinus na sinus pomocí Pythagorovy věty a goniometrické funkce od úhlu α převedeme dělením na tangens. Po těchto úpravách dostaneme kvadratickou rovnici

$$(1 + \mathrm{tg}^2\, \alpha) \sin^2 \beta + \mathrm{tg}\, \alpha \sin \beta - \frac{3}{4} \mathrm{tg}^2\, \alpha = 0\,.$$

Hledáme nejmenší z možných úhlů, z rovnice proto vezmeme kladný kořen, který značí, že knihu sklápíme tak, aby úhel mezi rovinou knihy a směrem paprsků klesal. Výsledkem je

$$\sin \beta = 0{,}461\,4\ldots \quad \Rightarrow \quad \beta \doteq 27^\circ\,.$$

Knihu je potřeba sklonit přibližně o 27°.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.11 ... draslíková folie

Když byla Kiki malá a ještě nevěděla nic o kvantové fyzice (znala jenom klasickou – energie je přenášena světelným svazkem spojitě), svítila si doma izotropním zdrojem světla s výkonem $P = 1{,}5\,\mathrm{W}$. Ve vzdálenosti $R = 3{,}5\,\mathrm{m}$ umístila fólii z draslíku s výstupní prací $\varphi = 2{,}2\,\mathrm{eV}$. Pomozte Kiki určit, kolik sekund bude fólii trvat, než vstřebá dostatek energie na to, aby emitovala elektron. Předpokládejte, že fólie absorbuje všechnu dopadající energii a že emitovaný elektron absorbuje energii dopadající na kruhovou plošku o poloměru $r = 5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$, daném typickým poloměrem atomu. *Dominika se zahleděla do minulosti.*

Předpokládejme, že energie emitovaná ze zdroje je rozložena stejnoměrně v rozšiřující se kulové vlnoploše se středem ve zdroji. Intenzita ve vzdálenosti R od bodového zdroje je dána jako

$$I = \frac{P}{4\pi R^2}\,.$$

Dopadá-li na plochu $S = \pi r^2$ světlo s intenzitou I po dobu t, pohltí se energie $E = ISt$. Jestliže tuto energii bude „nasávat“ jediný elektron, potřebuje k získání 2,2 eV dobu

$$t = \frac{\varphi}{IS} = \frac{4\pi\varphi R^2}{PS} \doteq 4\,600\,\mathrm{s}\,.$$

Ve skutečnosti však nemusí dojít k emisi žádných elektronů, neboť neznáme energii dopadajících fotonů.

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`

Úloha FoL.12 ... vyladěná

Zdroj vydává (silný) tón o frekvenci $f_0 = 440\,\mathrm{Hz}$ *(a'). Jaká je rychlost auta jedoucího přímo ke zdroji zvuku, jestliže osoby jedoucí v autě slyší místo něj tón hes' (o frekvenci* $f = 466\,\mathrm{Hz}$*)? Rychlost zvuku ve vzduchu je* $v = 343\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*, materiál auta zanedbáváme.*

Meggy chtěla něco s hudbou.

Podle Dopplerova zákona pro nepohybující se zdroj a pohybujícího se pozorovatele platí

$$f = f_0 \frac{v + v_\mathrm{p}}{v}\,,$$

kde v_p je kýžená rychlost pozorovatele. Po úpravě dostaneme

$$v_\mathrm{p} = v\left(\frac{f}{f_0} - 1\right)\,,$$

kde po dosazení získáme výsledek $v_\mathrm{p} \doteq 20{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Markéta Calábková
calabkovam@fykos.cz

Úloha FoL.13 ... bystrozraká

Sítnice lidského oka je nejcitlivější na žlutozelené světlo $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$*, pro něž jeho prahová citlivost činí* $P = 1{,}7\cdot 10^{-18}\,\mathrm{W}$*. Jaký minimální počet fotonů při tom musí dopadnout za sekundu na sítnici, aby došlo k vyvolání zrakového vjemu?* *Verče se zatmělo před očima.*

Energie jednoho fotonu je $E = hf$, což se znalostí vlnové délky můžeme přepsat na $E = hc/\lambda$. Aby došlo k vyvolání zrakového vjemu, musí na sítnici za $t = 1\,\mathrm{s}$ dopadnout N fotonů splňující rovnici

$$P = N\frac{E}{t} = N\frac{hc}{\lambda t}\,.$$

Z ní již můžeme vyjádřit a vypočítat N

$$N = \left\lceil \frac{P\lambda t}{hc} \right\rceil \doteq 5\,.$$

Vidíme, že k podráždění sítnice stačí 5 fotonů za sekundu.[1]

Veronika Dočkalová
verca@fykos.cz

Úloha FoL.14 ... pyramida

Školní model pravidelného čtyřbokého jehlanu byl vyroben ze dřeva o hustotě $\varrho_1 = 600\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*, jeho hmotnost byla* $m_1 = 300\,\mathrm{g}$ *a poměr délky hrany podstavy ku výšce jehlanu byl* $2 : 3$*. Nezbední žáci se ale jednou vloupali do kabinetu a uřízli nebohému jehlanu špičku řezem rovnoběžným s jeho podstavou. Učitel ale vyrobil chybějící špičku ze dřeva o hustotě* $\varrho_2 = 900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$

[1] Počet fotonů mohou vyjadřovat pouze přirozená čísla, proto je třeba zaokrouhlit nahoru na hodnotu 5.

a tu spojil se vzniklým zkoseným jehlanem, takže jehlan vypadal jako dřív. Teď ale jeho hmotnost je $m_2 = 309{,}6\,\mathrm{g}$. *V jaké vzdálenosti od podstavy (v* cm*) byla původnímu jehlanu uříznuta špička?*

Meggy si vzpomněla na stereometrii.

Hustoty si převedeme na jednotky $\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$, tedy $\varrho_1 = 0{,}6\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ a $\varrho_2 = 0{,}9\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$.

Z hmotnosti a hustoty původního jehlanu si snadno spočítáme jeho objem

$$V_1 = \frac{m_1}{\varrho_1} = 500\,\mathrm{cm^3}\,.$$

Délku hrany původního jehlanu si označme a, jeho výšku v. Z jejich poměru si můžeme vyjádřit

$$v = \frac{3}{2}a$$

a dosadit do vzorečku pro objem jehlanu

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2 v = \frac{a^3}{2}\,.$$

Z toho dostaneme délku strany a

$$a = \sqrt[3]{2V_1} = 10\,\mathrm{cm}$$

a potom už si snadno vyjádříme $v = 15\,\mathrm{cm}$.

Hmotnost odříznuté špičky si označme m' a hmotnost nově přidané špičky m''. Objem této špičky si označme V'. Známe rozdíl hmotností dvou „velkých“ jehlanů, tedy známe rozdíl hmotností špiček

$$m_2 - m_1 = m'' - m' = 9{,}6\,\mathrm{g}\,.$$

Hmotnosti si napíšeme jako součin hustoty a objemu

$$\varrho_2 V' - \varrho_1 V' = 9{,}6\,\mathrm{g}\,.$$

Za hustoty si dosadíme a po úpravě dostaneme

$$V' = 32\,\mathrm{cm^3}\,.$$

Špička a „velký jehlan“ jsou podobné, tedy si délku hrany podstavy u špičky označme a', její výšku v' a postupujme jako výše. Dostaneme $a' = 4\,\mathrm{cm}$ a $v' = 6\,\mathrm{cm}$.

Řez byl tedy veden ve výšce $v - v' = (15 - 6)\,\mathrm{cm} = 9{,}0\,\mathrm{cm}$ od podstavy původního jehlanu.

Markéta Calábková
`calabkovam@fykos.cz`

Úloha FoL.15 ... beranidlo vol. 2

Skřeti z Mordoru potřebují při útoku na Minas Tirith prorazit bránu. V paralelní Středozemi se jim to nepodařilo ani beranidlem s hořící tlamou, a proto se Sauron rozhodl zapřít nové beranidlo kolmo mezi bránu a dokonale pevnou zeď, kterou nechal postavit, a zahřívat jej, až bránu prorazí díky tepelné roztažnosti beranidla. O kolik kelvinů bude muset zvýšit teplotu beranidla? Uvažujte, že beranidlo je válec s osou kolmou na bránu, konstantním součinitelem tepelné roztažnosti $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$ *a modulem pružnosti v tlaku* $E = 211\,\mathrm{GPa}$. *Brána vydrží* *napětí v tlaku maximálně* $\sigma_{\max} = 400\,\mathrm{MPa}$. *Dále uvažujte, že tepelná roztažnost je lineární děj a brána se až do proražení nedeformuje.* *Ondra se díval na El Señor de los Anillos.*

Setkáváme se zde se dvěma ději, které ovlivňují délku beranidla: tepelná roztažnost a deformace tlakem, kterou popíšeme Hookovým zákonem. Přiřadíme jim relativní prodloužení ε_1 a ε_2

$$\varepsilon_1 = \alpha \Delta t\,, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\sigma}{E}\,.$$

Při zvyšování teploty se zvyšuje vnitřní tlakové napětí beranidla a jeho délka se až do proražení brány nezvyšuje. Při každém velmi malém zvýšení teploty se tedy kvůli zachování konstantní délky musí jednotlivá relativní prodloužení vyrovnat:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\sigma}{\alpha E}\,.$$

Zvýšení teploty a napětí v tlaku jsou tedy přímo úměrné a k proražení dojde v bodě $\sigma = \sigma_{\max}$

$$\Delta t = \frac{\sigma_{\max}}{\alpha E} \doteq 158\,\mathrm{K}\,.$$

Aby Sauron bránu prorazil, bude muset nechat zvýšit teplotu beranidla o $\Delta t = 158\,\mathrm{K}$.

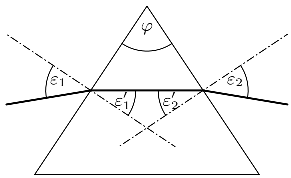
Ondřej Zelenka
`zelenka@fykos.cz`

Úloha FoL.16 ... lomivka

Paprsek bílého světla dopadá na tenkou skleněnou stěnu dutého hranolu, který je naplněn sirouhlíkem, pod úhlem $\varepsilon_1 = 50^\circ$. *Stěny hranolu jsou z tenkých planparalelních desek, lámavý úhel hranolu je* $\varphi = 60^\circ$. *Vypočtěte úhlovou šířku spektra světla, které projde (ve stupních), je-li index lomu sirouhlíku pro červené světlo* $n_\mathrm{c} = 1{,}618$ *a pro fialové světlo* $n_\mathrm{f} = 1{,}699$. *Index lomu skla je pro červené světlo* $n_\mathrm{cs} = 1{,}518$ *a pro fialové světlo* $n_\mathrm{fs} = 1{,}599$. *Pro vzduch, který obklopuje hranol, počítejte se stejným indexem lomu pro všechny vlnové délky* $n = 1$.

Faleš se musel prohrabat přes sešity...

Úhel spočítáme jako rozdíl odklonu od kolmého směru při výstupu z hranolu pro červené a fialové světlo. Úhel označíme α. Každý ze zmíněných dvou hraničních paprsků světla se bude lomit čtyřikrát – dvakrát při vstupu do hranolu a dvakrát při výstupu. V praxi se ale jedná o lomy pouze dva díky tomu, že stěny jsou tenké, světlo se tak bude lomit stejně, jako by se lomilo ze vzduchu rovnou do sirouhlíku. Snadno to nahlédneme z vícenásobného použití Snellova zákona za sebou, kde se vykrátí postupně všechny členy až na první a poslední.



Obr. 1: Geometrie hranolu.

Výsledný úhel odklonu pro danou vlnovou délku označme δ. Z geometrie pak platí, že

$$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varphi\,,$$

kde ε_2 je vstupní úhel na druhou desku hranolu (tzn. tu, přes kterou světlo hranol opustí). Pro úhel α platí

$$\alpha = \delta_\mathrm{f} - \delta_\mathrm{c}\,.$$

Zde index f značí fialové světlo a c znační červené světlo. Úhly ε_1 a φ jsou ale pro všechny vlnové délky stejné, a tak se odečtou a pro α platí

$$\alpha = \varepsilon_{2\mathrm{f}} - \varepsilon_{2\mathrm{c}} \, .$$

Tyto úhly najdeme podle vzorce

$$\sin \varepsilon_{2i} = \frac{\sin \varepsilon_2' n_i}{n} \, ,$$

kde čárkované úhly jsou ty, které jsou uvnitř hranolu, a i zastupuje vlnovou délku světla. Máme pro ε_2'

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2i}' &= \varphi - \varepsilon_{1i}' \, , \\ \sin \varepsilon_{1i}' &= \frac{\sin \varepsilon_{1i} n}{n_i} \, . \end{aligned}$$

Celkem

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{\sin \left(\varphi - \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1 n}{n_\mathrm{f}} \right) n_\mathrm{f}}{n} \right) - \arcsin \left(\frac{\sin \left(\varphi - \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1 n}{n_\mathrm{c}} \right) n_\mathrm{c}}{n} \right) .$$

Po dosazení máme číselně $\alpha \doteq 10{,}1^\circ$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha FoL.17 ... dlouhá noc

Jakou práci musíme vykonat, abychom prodloužili den o 4 hodiny? Zemi považujte za homogenní kouli o poloměru $R = 6\,378\,\mathrm{km}$ a hmotnosti $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

Kuba by se potřeboval déle vyspat.

Abychom prodloužili den na Zemi, musíme zpomalit její rotaci. Jinými slovy se tedy ptáme na to, jak se změní kinetická energie rotačního pohybu Země. Víme, že pro kinetickou energii rotačního pohybu platí vztah $E_\mathrm{r} = \frac{1}{2} J\omega^2$, kde J je moment setrvačnosti Země a ω úhlová rychlost její rotace, kterou vypočteme z periody (délky dne). Protože se jedná o kouli, tak $J = \frac{2}{5} MR^2$. Platí tedy

$$W = \frac{1}{2} J \left(\left(\frac{2\pi}{T_1} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T_2} \right)^2 \right) = \frac{1}{5} MR^2 \left(\left(\frac{2\pi}{T_1} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T_2} \right)^2 \right) ,$$

kde T_1 je původní a T_2 nová délka dne. Číselným dosazením dostaneme, že $W = 6{,}817 \cdot 10^{28}\,\mathrm{J}$.

Jakub Sláma
slama@fykos.cz

Úloha FoL.18 ... tlusté sklo

Lukáš se chce z katedry dívat na Černou skálu za kolejemi, ale překáží mu v tom budova A. *Lukáš je od budovy vzdálen $d = 400\,\mathrm{m}$ a dívá se na ni přibližně kolmo, takže se mu jeví jako obdélník o výšce $h = 70\,\mathrm{m}$ a šířce $w = 50\,\mathrm{m}$. Určete, jaký prostorový úhel (ve steradiánech) budova* A *v Lukášově výhledu zakrývá.* *Mirek zjistil, že za kolejí je přírodní památka.*

Všimněme si, že vzdálenost d je zhruba o řád větší než rozměry h, w. Potom je hledaný prostorový úhel Ω s dostatečnou přesností dán poměrem plochy stěny budovy a povrchu sféry o poloměru d, toto násobeno plným prostorovým úhlem 4π. Vzorcem

$$\Omega = 4\pi \frac{wh}{4\pi d^2} = \frac{wh}{d^2} \doteq 0{,}021\,9\,.$$

Přesný výsledek bychom dostali integrací

$$\int \frac{\mathrm{d}S}{r^2} \cos\alpha\,,$$

kde $\mathrm{d}S$ je plošný element, r jeho vzdálenost od pozorovatele a α je úhel mezi normálou plochy $\boldsymbol{n}$ a vektorem $\boldsymbol{r}$. Přepsáno kartézsky

$$\int_{-w}^{w} \int_{-h}^{h} \frac{d}{\left(d^2 + x^2 + y^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\,\mathrm{arctg}\, \frac{\frac{wh}{2d}}{\sqrt{4d^2 + w^2 + h^2}} \doteq 0{,}022\,.$$

Ověřili jsme, že naše aproximace byla v rámci požadované přesnosti postačující.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.19 ... špatně klopená

Stavební dělníci ne vždy postupují předně podle výkresů. Po jedné těžké noci si dokumentaci špatně přečetli a na nové silnici postavili zatáčku tak, že byla klopená na opačnou stranu než je obvyklé. O kolik kilometrů za hodinu touto chybou snížili maximální rychlost průjezdu zatáčkou, při které ještě auto nedostane smyk? Poloměr zatáčky je $r = 100\,\mathrm{m}$, úhel sklonu $\alpha = 5^\circ$ a součinitel statického smykového tření mezi vozovkou a pneumatikou je $f = 0{,}55$. Tíhové zrychlení uvažujte $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Pikoš pozoroval dělníky na stavbě.*

Uvažujme vztažnou soustavu spojenou s autem. Na auto v zatáčce působí čtyři síly:

- *tíhová síla* $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\boldsymbol{g}$, kde m je hmotnost auta a $\boldsymbol{g}$ je tíhové zrychlení,
- *odstředivá síla* $\boldsymbol{F}_\mathrm{o} = mv^2\hat{r}/r$, kde v je rychlost auta, r je poloměr zatáčky a $\hat{r}$ je jednotkový vektor, který je vodorovný a míří od středu křivosti zatáčky,
- *síla reakce od vozovky* $\boldsymbol{F}_\perp = F_\perp(-\sin\alpha, \cos\alpha)$, která je kolmá na vozovku a
- *třecí síla* $\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = F_\mathrm{t}(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$, která je s vozovkou rovnoběžná a jejíž velikost nesmí přesáhnout $fF_\perp$, kde f je součinitel statického smykového tření. Pokud je odstředivá síla hodně velká, bude třecí síla působit proti ní. Protože nám jde o maximální rychlost, která je omezena právě maximální velikostí této třecí síly, předpokládejme $F_\mathrm{t} = fF_\perp$.

Výsledná síla je $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_\mathrm{o} + \boldsymbol{F}_\perp + \boldsymbol{F}_\mathrm{t}$. Protože se v naší vztažné soustavě auto nepohybuje, musí platit $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, tedy

$$m(0,-g) + \frac{mv^2}{r}(1,0) + F_\perp(-\sin\alpha, \cos\alpha) + fF_\perp(-\cos\alpha, -\sin\alpha) = \boldsymbol{0}\,.$$

Z obou složek vyjádříme $F_\perp$ a položíme je do rovnosti, ze které pak vyjádříme rychlost

$$v = \sqrt{gr\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}}\,.$$

Pro $\alpha = 5^\circ$ vychází maximální rychlost asi $92{,}3\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, pro $\alpha = -5^\circ$ pak asi $74{,}9\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, čili maximální rychlost se snížila asi o $17{,}4\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Tomáš Pikálek
`pikos@fykos.cz`

Úloha FoL.20 ... minimální síla

Nechť jsou v prostoru umístěny tři kladné částice s náboji $Q_1 = 1\,\mathrm{C}$, $Q_2 = 2\,\mathrm{C}$ a $Q_3 = 4\,\mathrm{C}$. Najděte minimální velikost síly, kterou se odpuzují částice s náboji Q_1 a Q_3, když víte, že velikost síly, kterou se odpuzuje dvojice částic s náboji Q_1 a Q_2 je $F_{12} = 1\,\mathrm{N}$ a že velikost síly, kterou se odpuzuje dvojice částic s náboji Q_2 a Q_3 je $F_{23} = 4\,\mathrm{N}$. Prostor je vyplněn vakuem.

Náry se snažil dosáhnout minimální odpudivosti.

Pro výpočet použijeme Coulombův zákon silového působení elektricky nabitých statických částic

$$F_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_A Q_B}{d^2}\,,$$

kde d je vzdálenost částic nesoucí náboje Q_A a Q_B, ε je permitivita prostředí. Pomocí tohoto vztahu spočítáme vzájemné vzdálenosti částic s náboji Q_1 a Q_2 a posléze vzdálenost částic s náboji Q_2 a Q_3. Matematicky psáno

$$d_{12} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{F_{12}}}\,,$$
$$d_{23} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_2 Q_3}{F_{23}}}\,.$$

Protože je závislost velikosti odpudivé síly částic na jejich vzájemné vzdálenosti reciproká, bude odpudivá síla minimální, když vzájemná vzdálenost částic bude maximální. Maximální vzdálenost částic s náboji Q_1 a Q_3 je tedy $d_{13} = d_{12} + d_{23}$. Dosazením do našeho Coulombova zákona spočítáme minimální sílu

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_3}{\left(\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{F_{12}}} + \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_2 Q_3}{F_{23}}}\right)^2}\,,$$
$$F_{13} = \frac{Q_1 Q_3}{\left(\sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{F_{12}}} + \sqrt{\frac{Q_2 Q_3}{F_{23}}}\right)^2}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot máme, že částice s náboji Q_1 a Q_3 se mohou odpuzovat minimálně silou 0,50 N.

Jiří Nárožný
`nahry@fykos.cz`

Úloha FoL.21 ... ukazovátko

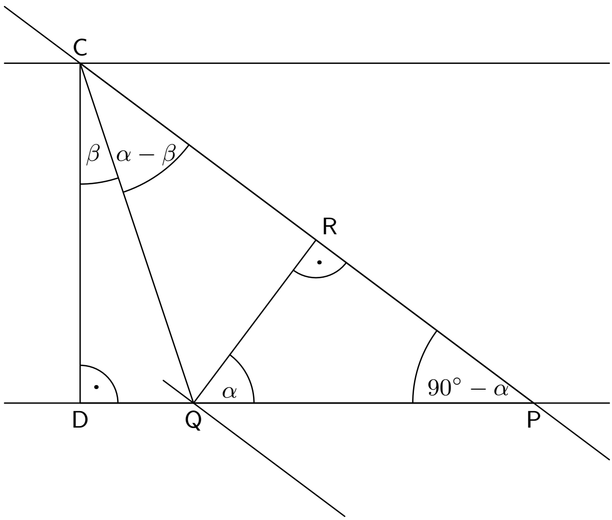
Jednofrekvenční laser míří kolmo na pevné stínítko. Zaznamenáme bod, kam svítí, když mu v cestě nestojí nic jiného než vzduch. Paprsku postavíme do cesty průhlednou desku z opticky hustšího materiálu o tloušťce $d = 2\,\mathrm{cm}$, do níž paprsek vstupuje pod úhlem $\alpha = 30^\circ$ od kolmého směru a vystoupí na opačné straně desky. Bod dopadu paprsku je teď od toho původního posunut o $\delta = 0{,}6\,\mathrm{cm}$. Jaký je index lomu n_2 desky? Index lomu vzduchu je $n_1 = 1$.

Meggy zkusila geometrii.

Celou scénu si promítneme do roviny šíření lomeného paprsku. Před i za deskou paprsek pokračuje stejným směrem jako původně, tedy k posunu muselo dojít uvnitř desky. Podle Snellova zákona platí

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,,$$

kde β je úhel lomu paprsku v desce. Představíme si průchod paprsku jako, kdyby tam žádná deska nebyla. Tomuto paprsku říkejme p, reálný lomený paprsek si označme q. Oba paprsky vejdou do desky v bodě C, paprsek p pak vyjde z desky v bodě P a paprsek q v bodě Q. Vzdálenost δ je délka kolmice z bodu Q na paprsek p (její patu označme R); bod naproti C označme D (pak $|\mathrm{CD}| = d$). Trojúhelníky PQR a PCD jsou podobné.



Obr. 2: Geometrie lomu paprsku.

Vidíme, že

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{PQ}| &= \frac{\delta}{\cos\alpha} \doteq 0{,}692\,8\,\mathrm{cm}\,,\\
|\mathsf{PD}| &= \frac{d}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = d\operatorname{tg}\alpha \doteq 1{,}154\,7\,\mathrm{cm}\,,\\
\operatorname{tg}\beta &= \frac{|\mathsf{QD}|}{d} = \frac{|\mathsf{PD}|-|\mathsf{PQ}|}{d} \doteq 0{,}231\,.
\end{aligned}
$$

Z toho dostaneme

$$\beta \doteq 13{,}0^\circ\,,$$

tedy už si můžeme vyjádřit

$$n_2 = \frac{n_1 \sin\alpha}{\sin\beta} \doteq 2{,}22\,.$$

Index lomu desky tedy je 2,22.

Markéta Calábková
calabkovam@fykos.cz

Úloha FoL.22 ... kdy zastavit katapult

Uvažujme nehmotnou tyč v tíhovém poli s osou otáčení kolmou na tíhové zrychlení i na onu tyč. Ve vzdálenosti $R = 1\,\mathrm{m}$ od osy umístěme závaží o hmotnosti $M = 10\,\mathrm{kg}$, na druhou stranu položme projektil o hmotnosti $m = 500\,\mathrm{g}$ do vzdálenosti $r = 10\,\mathrm{m}$. Rameno katapultu (tyč) uvedeme do vodorovné polohy, poté uvolníme a nárazově rameno zastavíme ve chvíli, kdy svírá s vodorovnou rovinou úhel φ. Najděte optimální úhel φ (ve stupních), takový, aby byl co nejdelší dolet projektilu. Dolet počítejte pouze do výšky, ze které projektil vyletěl při zastavení katapultu. Konstrukce katapultu je taková, že závaží neklouže.

Lubošek chtěl vystřelit spolubydlícího katapultem.

Nejprve ukažme, na čem záleží dostřel d. Z teorie šikmého vrhu víme, že

$$d = v_x t = \frac{2}{g} v_y v_x = \frac{2}{g} v^2 \sin\varphi\cos\varphi\,,$$

kde v je rychlost, kterou je vystřelen projektil, v_x resp. v_y její složky a g tíhové zrychlení. Po dosazení hodnot při sepnutí katapultu dostaneme

$$d = \frac{2}{g} r^2\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\,,$$

kde ω je úhlová rychlost ramen katapultu při vystřelení projektilu.

Pro katapult před a po sepnutí platí zákon zachování mechanické energie

$$g(MR - mr)\sin\varphi = \frac{1}{2}(MR^2 + mr^2)\omega^2\,.$$

Po dosazení do rovnice doletu dostaneme

$$d = \frac{4r^2(MR - mr)}{MR^2 + mr^2}\sin^2\varphi\cos\varphi\,.$$

Je zajímavé, že dostřel nezáleží na tíhovém zrychlení a všechny mechanické parametry katapultu tvoří pouze multiplikativní faktor.

Dále si rozmysleme, že pro $\varphi = 0^\circ$ a $\varphi = 90^\circ$ je dostřel nulový, pro hodnoty mezi nimi je kladný. Proto, bude-li existovat právě jeden stacionární bod (bod, ve kterém je nulová derivace) závislosti $d(\varphi)$, bude tento bod maximem. Položme tedy

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\varphi} = 0\,,$$

což vede na

$$2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0\,,$$

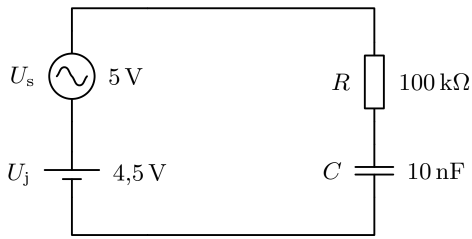
po úpravě $\varphi = \arccos\left(1/\sqrt{3}\right) \doteq 54{,}74^\circ$.

Lubomír Grund
grund@fykos.cz

Úloha FoL.23 ... striedavo-jednosmerny 1

Máme obvod na obrázku 3, jednosměrný zdroj má napětí $U_\mathrm{j} = 4{,}5\,\mathrm{V}$*, střídavý amplitudu* $U_\mathrm{s} = 5\,\mathrm{V}$ *a frekvenci* $f = 50\,\mathrm{Hz}$*. Odpor rezistoru je* $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$ *a kapacita kondenzátoru* $C = 10\,\mathrm{nF}$*. Jaká je střední hodnota náboje na kondenzátoru v* nC*?*

Xellos nemá rád brokolici, proto vymyslel úlohu bez ní.



Obr. 3: Schéma zapojení obvodu.

Dva zdroje sú chyták – všetky prvky v obvode sú lineárne, preto ho môžeme vnímať ako superpozíciu (súčet) dvoch obvodov – jedného s jednosmerným a druhého so striedavým zdrojom. Náboj na kondenzátore je súčtom nábojov z oboch obvodov; pre striedavý prúd je ale stredná hodnota 0, takže výsledok je rovnaký, ako keby sme mali len jednosmerný zdroj. Pri ňom nemôže obvodom prechádzať prúd, rezistor môžeme preto tiež zahodiť a výsledok je $Q = CU_\mathrm{j} = 45\,\mathrm{nC}$.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha FoL.24 ... tik tak

V krabici jsou dvoje hodiny. Jednak hodiny se setrvačkou (to jest klasické náramkové hodiny, alternativně to mohou být i digitální hodiny) a kyvadlové hodinky, jejichž kyvadlo se skládá z tyče o délce $l = 30\,\mathrm{cm}$ *s hmotností* $m = 300\,\mathrm{g}$ *a disku upevněném na jejím konci o zanedbatelné* *tloušťce a průměru $d = 10\,\mathrm{cm}$ a plošné hustotě $\sigma = 7{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$. Disk je upevněn podélně v jediném směru, ve kterém se může kyvadlo pohybovat (ve kterém kmitá). Malá raketa vynese krabici se zrychlením $a = 5g$ (g je tíhové zrychlení Země) do výšky $h = 30\,\mathrm{km}$, kde je uvolněna a ponechána své setrvačnosti v tíhovém poli Země. Tíhové pole Země považujte za homogenní a zanedbejte odpor vzduchu. Tíhové zrychlení Země uvažujte jako $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. O kolik (v absolutní hodnotě) se budou lišit časy na obou hodinách v nejvyšším bodě dráhy krabice?*

Faleš přepracoval relativistický paradox.

Musíme si uvědomit, že narozdíl od hodin se setrvačkou (digitálních hodin) jsou kyvadlové hodiny závislé na tíhovém zrychlení. Při stoupání rakety bude ale efektivně větší, konkrétně se bude hodinám jevit jako šestinásobek $(1 + 5)$ tíhového zrychlení Země. Naopak po uvolnění krabice se tato krabice bude nacházet v beztížném stavu – bude konat volný pád (s počáteční rychlostí v směrem nahoru).

Digitální hodiny jsou neovlivněny, takže čas na nich bude dán jako součet $t = t_1 + t_2$, kde t_1 je čas stoupání a t_2 je čas beztížného stavu od vypuštění do dosažení nejvyššího bodu dráhy. Spočítáme je jako

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a}}\,,$$

$$t_2 = \frac{v}{g} = \frac{t_1 a}{g} = \frac{\sqrt{2ha}}{g}\,.$$

Pro periodu kyvadlových hodin platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l + \frac{I}{ml}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\mathrm{red}}}{g}}\,,$$

kde I je moment setrvačnosti soustavy disk a tyč vzhledem k jejich společnému těžišti, které je od osy otáčení vzdálené l, člen ml^2 je zde pak ze Steinerovy věty pro moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení. Důležité však je jen to, že lze původní výraz převést do tvaru stejného jako má matematické kyvadlo pro nějakou novou délku l_{red}, jejíž velikost je pro nás nepodstatná. Dostali jsme tím totiž, že perioda je až na konstantu úměrná $g^{-\frac{1}{2}}$. Zvětší-li se tíhové zrychlení v důsledku stoupání na šestinásobek, pak čas stoupání, který naměří kyvadlové hodiny bude $t_1^{\mathrm{k}} = \sqrt{6}t_1$ (perioda bude $\sqrt{6}$krát menší, takže čas bude větší). V beztížném stavu se pak hodiny zastaví, takže čas $t_2^{\mathrm{k}} = 0\,\mathrm{s}$.

Hledaný rozdíl časů τ pak je

$$\tau = \left|\left(1 - \sqrt{6}\right)\sqrt{\frac{2h}{a}} + \frac{\sqrt{2ha}}{g}\right|\,.$$

Po vyčíslení máme $\tau \doteq 124\,\mathrm{s}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha FoL.25 ... ospálek

V 6:30 ráno přesně byl připraven roztok radiofarmaka s radioaktivním ^{18}F, který měl objemovou aktivitu $330\,\mathrm{MBq\cdot ml^{-1}}$, pro pacienta, kterému měl být aplikován přesně v 8:00 téhož dne $1\,\mathrm{ml}$ tohoto roztoku. Pacient však přišel pozdě, a proto mu injekce byla podána až v 8:40. Jaký objem roztoku v ml radiofarmaka by měl pacient dostat, aby dávka byla ekvivalentní původně plánované? ^{18}F má poločas rozpadu $109\,\mathrm{min}$ a produktem jeho rozpadu je stabilní kyslík.

Choďte včas a dodržujte termíny.

Aktivita radiofarmaka v 8:00 hodin bude

$$A(t) = A_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T} t\right) ,$$

kde A_0 je původní aktivita, T je poločas rozpadu a $t = 90\,\mathrm{min}$ je čas od přípravy. Aktivitu radiofarmaka v 8:40 dopočítáme obdobně, pouze dosazujeme čas $t' = 130\,\mathrm{min}$. Pokud víme, že v 8:00 by stačil mililitr radiofarmaka s aktuální aktivitou, bude v 8:40 potřebný větší objem podle přímé úměry

$$\frac{V'}{V} = \left(A_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T} t}\right) / \left(A_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T} t'}\right) = \exp\left(\frac{\ln 2\,(t' - t)}{T}\right) = 2^{\frac{t'-t}{T}} = 1{,}29\,,$$

bude tedy třeba objem $V' = 1{,}29\,\mathrm{ml}$ roztoku radiofarmaka.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha FoL.26 ... Marťan

Jaký maximální tlak plynu (v μPa) dokážeme udržet ve sférickém balóně o velikosti Marsu, pokud je vyrobený z jedné vrstvy grafenu? Poloměr Marsu je $R_\mathrm{M} = 3\,390\,\mathrm{km}$, maximální napětí ve vrstvě grafenu je $\sigma_\mathrm{max} = 42\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Zanedbejte gravitaci plynu. *Elon Musk.*

Rozdeľme si balón (aj s plynom) na dve (rovnaké) polovice. Každú polovicu od druhej odtláča tlak na ich (myslenej) styčnej ploche a spolu ich drží pnutie po obvode. Maximálna sila z pnutia je $2\pi R_\mathrm{M}\sigma_\mathrm{max}$. Táto sila musí byť $\geq$ ako tlaková sila na kruhový prierez guľovým balónom o veľkosti $\pi R_\mathrm{M}^2 p$. Vyjadríme tlak a spočítame

$$p_\mathrm{max} = \frac{2\sigma_\mathrm{max}}{R_\mathrm{M}} \doteq 25\,\mu\mathrm{Pa}\,.$$

Maximálný tlak, ktorý sa dá udržať v balóně je $p_\mathrm{max} \doteq 25\,\mu\mathrm{Pa}$.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Úloha FoL.27 ... dusík dusí publikum

Jaký objem V by zabral dusík z jedné $V_\mathrm{D} = 7{,}0\,\mathrm{l}$ Dewarovy nádoby, kdyby byla plná kapalného dusíku a nechali bychom ji celou vyvařit za standardních podmínek, pro nás $t = 20\,^\circ\mathrm{C}$ a $p_\mathrm{a} = 1\,013\,\mathrm{hPa}$? Zajímá nás objem dusíku, takže můžete uvažovat, že chcete zjistit, jak by musela být velká místnost, která byla původně vakuovaná a dusík se vyvařil do ní na tuto teplotu a tlak.

Hustota kapalného dusíku je $\varrho_\mathrm{L} = 808\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, molární hmotnost dusíku je $M_\mathrm{m} = 28{,}0\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, molární plynová konstanta je $R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$ a hustota plynného dusíku za standardních podmínek je $\varrho_\mathrm{G} = 1{,}16\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Karel uvažoval o tom, co by se muselo všechno stát, aby se zadusilo publikum při předvádění pokusů s kapalným dusíkem.

Nejjednodušším řešením je využít toho, že hmotnost dusíku m je stejná před i po vyvaření. Pak stačí jenom „vyjádřit z trojčlenky“.

$$m = \varrho_\mathrm{L} V_\mathrm{D} = \varrho_\mathrm{G} V \quad \Rightarrow \quad V = V_\mathrm{D}\frac{\varrho_\mathrm{L}}{\varrho_\mathrm{G}} \doteq 4{,}9\,\mathrm{m^3}\,.$$

Velice rychle jsme tedy získali řešení úlohy. Dusík by tedy po vyvaření zabral objem $4{,}9\,\mathrm{m^3}$.

Nicméně když už to byl úmyslný chyták na to, že můžete zvolit jak rychlou, tak pomalou cestu, která by vás mohla dovést k správnému výsledku, tak uvedeme i to delší řešení. Vyjdeme ze stavové rovnice pro ideální plyn, protože nás zajímá konečný stav systému, který má tlak, pro který ji můžeme použít.

$$p_\mathrm{a} V = nRT\,,$$

kde p_a a R máme zadáno, V chceme určit a T si můžeme převést z $t = 20\,^\circ\mathrm{C}$, tedy $T \doteq 293\,\mathrm{K}$. Látkové množství n pak můžeme vyjádřit jako

$$n = \frac{m}{M_\mathrm{m}} = \frac{\varrho_\mathrm{L} V_\mathrm{D}}{M_\mathrm{m}}\,.$$

Dostáváme tedy vztah pro objem

$$p_\mathrm{a} V = \frac{\varrho_\mathrm{L} V_\mathrm{D}}{M_\mathrm{m}} RT \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\varrho_\mathrm{L} V_\mathrm{D}}{p_\mathrm{a} M_\mathrm{m}} RT \doteq 4{,}9\,\mathrm{m^3}\,.$$

Tedy v rámci požadované přesnosti nám vyšel stejný výsledek. Je pravdou, že v dalších cifrách byste si asi všimli rozdílu, který je ale způsobený právě tím, že jsou zadané zaokrouhlené hodnoty a používat více platných cifer nemá tedy fyzikálně dobrý význam.

Kdyby někoho z vás zajímalo, jestli by pokusy s kapalným dusíkem zadusily publikum, tak by bylo nutné snížit obsah kyslíku v místnosti alespoň pod 11 % (spíše pod 8 %), přičemž místnosti bývají obvykle větrané, takže není snadné někoho zadusit.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FoL.28 ... exoplaneta

Na exoplanetě Kepler-138c s poloměrem $R_\mathrm{K} = 1{,}2\,R_\mathrm{E}$, kde R_E je poloměr Země, a hustotou rovnou hustotě Země vykopali domácí tunel podél jejího průměru. O kolik déle (v sekundách) bude trvat cesta tímto tunelem (bez tření a bez pohonu), než cesta obdobným tunelem na Zemi? Nechť je rozložení hustoty homogenní v obou planetách. Filip kopal v záhrade.

Z Gaussovho zákona vieme, že hmotnosť „nad“ vozidlom, ktorým cestujeme, nemá počas cesty na vozidlo vplyv, a teda sila pôsobiaca na vozidlo vo vzdialenosti r od stredu planéty je

$$m\ddot{r} = -\frac{4\pi r^3 \varrho G m}{3r^2}\,,$$

$$\ddot{r} = -\frac{4}{3}\pi\varrho G r\,.$$

Z toho už vidíme, že perióda týchto kmitov závisí len na hustote, a teda rozdiel je nulový.

Filip Ayazi
`filip@fykos.cz`

Úloha FoL.29 ... skrýš na Měsíci

Iva a Radek stojí na Měsíci. Do jaké nejmenší vzdálenosti od sebe si musí stoupnout, aby je rozlišil šmírák Aleš, který stojí na vrcholku Mount Palomaru $r = 3{,}8 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ daleko? Aleš má k dispozici dalekohled o průměru $5\,\mathrm{m}$. Ivu a Radka považujte za dva body svítící na vlnové délce $500\,\mathrm{nm}$. *Dominika nechodí po hospodách, drby si musí vymyslet.*

Když se díváme na bod nějakou optickou soustavou, světlo z tohoto bodu se na částech této soustavy difraktuje – na čočkách, okrajích dalekohledu, atd. Bodový zdroj se tak zobrazí na soustavu difrakčních kroužků. Rayleighovo kritérium rozlišitelnosti říká, že dva objekty se stanou rozlišitelnými, pokud se první minimum intenzity jednoho kroužku překrývá s prvním maximem druhého. Matematicky řečeno, úhlová vzdálenost objektů musí být aspoň

$$\alpha = \frac{1{,}22\lambda}{d}\,,$$

kde λ je vlnová délka světla, d je průměr apertury dalekohledu a konstanta 1,22 plyne z rozložení difrakčních kroužků, které je popsáno Besselovou funkcí prvního druhu. Iva a Radek jsou od sebe vzdáleni x a z uspořádání problému zjevně platí $x \ll r$, můžeme proto použít aproximaci $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$. Potom z jednoduché geometrie odvodíme

$$\alpha \approx \frac{x}{r}\,.$$

Nyní již snadno můžeme pro Aleše spočítat jejich rozlišitelnou vzdálenost

$$x = 1{,}22\frac{\lambda r}{d} \doteq 46{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

K Alešově nelibosti budou Iva s Radkem rozlišitelní, až když se od sebe vzdálí na $x = 46{,}4\,\mathrm{m}$.

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`

Úloha FoL.30 ... roztavený termistor

Termistor je polovodičová součástka, jejíž odpor výrazně klesá s rostoucí teplotou podle vztahu $R = R_0 \exp\left(c\left(1/T - 1/T_0\right)\right)$, kde teploty T, T_0 se dosazují v K, $R_0 = 120\,\Omega$ je odpor při pokojové teplotě $T_0 = 25\,^\circ\mathrm{C}$ a $c = 3{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$. Tento vzorec samozřejmě přestává platit při teplotě $T_\mathrm{t} = 150\,^\circ\mathrm{C}$, kdy se termistor začne tavit. Výkon, kterým je z termistoru při teplotě T odváděné teplo do okolí s teplotou T_0, je $P_\mathrm{chl} = k(T - T_0)$ a $k = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W{\cdot}K^{-1}}$. Na jaké nejvyšší napětí může být termistor připojený bez toho, aby se (po dostatečně dlouhém čase) zahřál na teplotu větší, nebo rovnu T_t? *Xellos si spomenul na praktiká.*

Hľadáme maximálne napätie, pri ktorom sa ustáli tepelná rovnováha na rezistore – existuje teplota, pri ktorej je všetko Joulovo teplo odvádzané do okolia. Potom platí

$$k(T-T_0)=\frac{U^2}{R}\,,$$
$$U=\sqrt{k(T-T_0)R_0\mathrm{e}^{c\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}}\,.$$

Výraz pod odmocninou síce v limite nekonečných teplôt rastie lineárne s T, ale v rozumnom rozsahu teplôt (tisícky kelvinov, čo je oveľa viac ako T_t) nadobúda najväčšiu hodnotu v jedinom maxime (lokálnom). Môžeme teda priamo hľadať bod, v ktorom je derivácia nulová

$$\mathrm{e}^{c\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}+(T-T_0)\mathrm{e}^{c\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}c\left(-\frac{1}{T^2}\right)=0\,,$$

$$T^2=c(T-T_0)\,,$$
$$T=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4cT_0}}{2}\doteq 336\,\mathrm{K}$$

pre znamienko mínus (znamienko plus vedie na minimum pri teplote asi 2 700 K). Napätie, pri ktorom sa ustáli na termistore táto teplota, je $U=0{,}81\,\mathrm{V}$.

Druhá, rozumnejšia možnosť je odčítať hľadané maximum z grafu $U(T)$.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

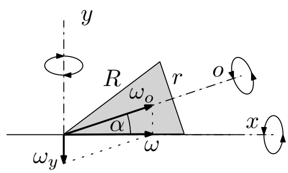
Úloha FoL.31 ... rotace rotace

Verči spadla z hlavy narozeninová čepička ve tvaru kužele a začala se kutálet po podlaze. Kužel má površku $R=30\,\mathrm{cm}$, poloměr podstavy $r=10\,\mathrm{cm}$ a při valení se otáčí kolem svého nehybného vrcholu s úhlovou rychlostí ω_y. Kolem své rotační osy se kužel otáčí s úhlovou rychlostí $\omega_o = 5{,}0\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je úhlová rychlost ω bodů na povrchu kužele vůči okamžité ose otáčení? Kužel se odvaluje po drsné podložce. *Mirek skládal rotace.*

Hledaná úhlová rychlost ω je dána složením pohybů s rychlostmi ω_o a ω_y. Vektory těchto rychlostí jsou zakresleny na obrázku.4.

Jelikož se kužel valí po drsné podložce, nedochází k prokluzu a kužel opisuje kružnici se středem ve vrcholu a s poloměrem R. Mezi úhlovými rychlostmi ω_y a ω_o pak platí jednoduchý vztah

$$R\omega_y=r\omega_o\,. \tag{2}$$



Obr. 4: Rozbor rotačních pohybů.

Pomocí úhlu α (úhel mezi hledanou rychlostí a ω_o) a kosinové věty vyjádříme

$$\omega_y^2=\omega^2+\omega_o^2-2\omega\omega_o\cos\alpha\,. \tag{3}$$

Úhel α je vrcholový úhel a platí pro něj

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}=\frac{\omega}{\omega_o}\,.$$

Po dosazení do kosinové věty (3) dostaneme

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \omega_y^2\,;$$

to je Pythagorova věta, proto ω leží v rovině podložky, jak znázorňuje obrázek. Pomocí vztahu (2) již vyjádříme hledanou velikost úhlové rychlosti

$$\omega = \omega_o\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} = 4{,}7\,\mathrm{s^{-1}}\,.$$

Úhlová rychlost je $\omega = 4{,}7\,\mathrm{s^{-1}}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.32 ... superschopnosti

Kdyby si Aleš mohl vybrat nějakou superschopnost, vybral by si možnost vidět intenzitu elektrického a magnetického pole. Předpokládejme, že takovou schopnost má. Když stojí $1{,}8\,\mathrm{m}$ *od bodového zdroje světla s výkonem* $P = 250\,\mathrm{W}$*, jakou pocítí efektivní hodnotu magnetického pole?* *Dominika přemýšlí, jaké důsledky mohou mít přání organizátorů.*

Pro bodový zdroj platí, že energie vln se během šíření se zachovává – sestrojíme-li kouli se středem ve zdroji a poloměrem r, všechna vyslaná energie touto koulí musí projít. Energie prošlá za jednotku času povrchem této koule musí proto být rovna energii vyslané za stejnou dobu zdrojem, tj. výkonu zdroje P. Intenzita I vlny na povrchu koule tedy musí být

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}\,.$$

Intenzita vlny vycházející z bodového zdroje je tok energie přes povrch této koule, který závisí na efektivní hodnotě elektrického pole na ní E_{ef} jako

$$I = \frac{1}{c\mu_0}E_{\mathrm{ef}}^2 = c\varepsilon_0 E_{\mathrm{ef}}^2\,,$$

kde c je rychlost světla, μ_0 permeabilita a ε_0 permitivita vakua; tyto konstanty jsou svázány vztahem $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$. Dále využijeme vztahu mezi magnetickým B_{ef} a elektrickým polem E_{ef}: $E_{\mathrm{ef}} = cB_{\mathrm{ef}}$ (I je tedy hustota EM energie krát rychlost vlny). Dáme-li do rovnosti uvedené vztahy pro intenzitu a pomocí posledního vztahu vyjádříme magnetické pole, dostaneme výsledek

$$B_{\mathrm{ef}} = \sqrt{\frac{P\mu_0}{4\pi r^2 c}} = 1{,}6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}\,.$$

Aleš tedy pocítí magnetické pole o síle $1{,}6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}$.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha FoL.33 ... kulová

Malá homogenní kulička o poloměru $r = 3\,\mathrm{cm}$ je v nehybné kulové dutině poloměru $R = 10\,\mathrm{cm}$, po které se odvaluje bez prokluzu. Kuličku malinko vychýlíme. Jaká je perioda jejího kmitu?

Guljočka v jamočke, si Tom opakoval...

Zapomeňme na chvíli na to, že kulička není na rovné podložce. Jestli se pohybuje střed kuličky rychlostí v, bude se točit úhlovou rychlostí $\omega = v/R$. Její kinetická energie bude pak

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\,,$$

kde m je hmotnost a $I = \frac{2}{5}mr^2$ moment setrvačnosti kuličky. Po úpravě dostaneme

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mr^2\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2\,.$$

Když je kulička natočená o úhel φ (měřený vůči středu dutiny, v rovnovážné poloze $\varphi = 0$), můžeme rychlost jejího středu vyjádřit jako $v = (R-r)\Omega$, $\Omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ je úhlová rychlost oběhu středu kuličky kolem středu dutiny. Potenciální energie kuličky (s nulovou hladinou v rovnovážné poloze) je

$$E_\mathrm{p} = mg(R-r)\left(1-\cos(\varphi)\right)\,.$$

Protože φ je velmi malé, můžeme uvažovat aproximaci $\cos(\varphi) \approx 1 - \varphi^2/2$. Zákon zachování energie pak zní

$$\frac{7}{10}m(R-r)^2\Omega^2 + mg(R-r)\frac{\varphi^2}{2} = \mathrm{konst}\,.$$

Jde o harmonický oscilátor, jehož řešení je

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\,,$$

kde φ_0 je amplituda a T perioda

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}} \doteq 0{,}63\,\mathrm{s}\,.$$

Perioda kyvu kuličky je $T \doteq 0{,}63\,\mathrm{s}$.

Tomáš Fiala
`tomas.fiala@fykos.cz`

Úloha FoL.34 ... diody

Zapojíme do série dvě diody splňující ideální Shockleyho zákon

$$I(U) = I_\mathrm{S}\left(\exp\left(\frac{U}{V_\mathrm{T}}\right) - 1\right)\,.$$

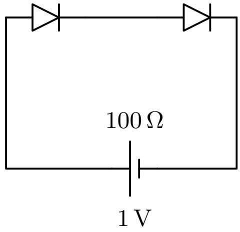
První má saturační proud $I_\mathrm{S} = 1\cdot 10^{-11}\,\mathrm{A}$, druhá dvojnásobný. Tepelné napětí je $V_\mathrm{T} = 26\,\mathrm{mV}$. K diodám je připojený zdroj s napětím $V = 1\,\mathrm{V}$ a vnitřním odporem $100\,\Omega$. Jaký výkon (v mW) se uvolňuje na diodách dohromady?

Hint *Když se ptáme pouze na číselný výsledek, klidně řešte rovnice numericky.*

Janči uvažoval nad diódami v sérii.

Označíme si potenciály ako na obrázku, nulový potenciál bude na zápornom póle zdroja. S použitím Ohmovho a Shockleyho zákona napíšeme

$$V - \varphi_2 = RI\,,$$
$$I_{S2}(e^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{V_T}} - 1) = I\,,$$
$$I_{S1}(e^{\frac{\varphi_1}{V_T}} - 1) = I\,.$$



Obr. 5: Schéma zapojení obvodu.

Vyjadríme $\varphi_2 = V - RI$ a $\exp(\varphi_1/V_T) = I/I_{S1} + 1$ a dosadíme do druhej rovnice

$$I_{S2}\left(e^{\frac{V-IR}{V_T}}\left(\frac{I}{I_{S1}} + 1\right)^{-1} - 1\right) = I\,.$$

Všimnime si, že prúdy I_{S1} a I_{S2} musia byť oveľa menšie ako I: ak by boli porovnateľné, napätia na diódach by boli porovnateľné s V_T a napätie na rezistore by muselo byť zvyškom celkového napätia, teda takmer 1 V. To by ale znamenalo, že I je približne V/R, čo je spor.

Zanedbáme teda tieto malé prúdy oproti I a po úprave dostaneme

$$I = \sqrt{I_{S1}I_{S2}}\, e^{\frac{V-RI}{2V_T}}\,.$$

Túto rovnicu vieme vyriešiť numericky pre prúd; riešenie je

$$I \doteq 0{,}75\,\mathrm{mA}\,,$$

takže chyba spôsobená našou aproximáciou je rádu $I_S/I \doteq 10^{-8}$.

Keďže obomi diódami prechádza rovnaký prúd a súčet napätí na nich je rovný φ_2, výkon na diódach je potom jednoducho

$$P = \varphi_2 I = (V - RI)I \doteq 0{,}69\,\mathrm{mW}\,.$$

Na diodách se uvolňuje výkon $P = 0{,}69\,\mathrm{mW}$.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Úloha FoL.35 ... záhradnícka

Zahradník amatér chtěl zalít svoji zahrádku. Vzal válcové vědro s obsahem dna $S = 420\,\mathrm{cm}^2$ a nalil do něj vodu do výšky $h = 40\,\mathrm{cm}$. Potom do dna udělal díru s obsahem $s = 2\,\mathrm{cm}^2$ a začal zalévat. Jak dlouhou řádku dokáže zahradník zalít, jestliže jeho rychlost je $u = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?
Hint *Pro objemovou rychlost výtoku platí vztah $v = \mu s\sqrt{2gx}$, kde $\mu = 0{,}6$ je výtokový součinitel a x je aktuální výška vody.* *Marek doma polieval záhradku.*

Je potrebné vypočítať, za aký čas t vytečie z vedra všetka voda. Platí vzťah

$$t = \int_0^h \frac{S}{v}\,\mathrm{d}x\,.$$

Po dosadení vzťahu pre výtokovú rýchlosť dostaneme

$$t = \int_0^h \frac{S}{\mu s \sqrt{2gx}}\,\mathrm{d}x\,,$$

z ktorého po integrovaní dostaneme vzťah pre výpočet času

$$t = \frac{2S\sqrt{h}}{\mu s\sqrt{2g}}\,.$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostávame $t \doteq 99{,}9\,\mathrm{s} \doteq 100\,\mathrm{s}$, čo pri danej rýchlosti záhradníka zodpovedá približnej dĺžke hriadky $l = 100\,\mathrm{m}$.

Marek Martaus
`martaus@fykos.cz`

Úloha FoL.36 ... šťastné shledání

Ve volném prostoru se velmi daleko od sebe nachází šest elektronů. Jsou umístěné ve vrcholech pravidelného šestiúhelníku a pohybují se každý rychlostí $v = 1\,000\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ směrem do středu šestiúhelníku (rychlost odečítáme vůči středu). Na jakou nejmenší vzdálenost se k sobě dva sousední elektrony přiblíží? *Mirek se inspiroval Náryho snažením.*

Jestliže jsou na začátku elektrony velmi vzdálené, můžeme zanedbat jejich vzájemné silové působení. Elektrostatická potenciální energie potom nepřispívá do celkové energie, máme pouze kinetickou energii, která činí

$$E_\mathrm{k} = 6\cdot\frac{1}{2}m_\mathrm{e}v^2\,,$$

kde $m_\mathrm{e} = 9{,}1\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost elektronu. Není pro nás důležité, na jaké vzdálenosti začne hrát coulombické působení roli. Důležité je, že výsledná síla působí na každý elektron stejnou měrou a směrem od středu šestiúhelníku. Nastane tedy chvíle, kdy se všechny elektrony zastaví a budou stát ve vrcholech pravidelného šestiúhelníku, samozřejmě menšího než na počátku. V tuto chvíli bude kinetická energie elektronů nulová a elektrostatická potenciální energie maximální.

Potenciální energie soustavy bodových nábojů je dána součtem potenciální energie každé dvojice nábojů, zcela obecně

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{kq_j}{r_{ij}}\,,$$

kde $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$ je Coulombova konstanta, q je bodový náboj, r_{ij} je vzdálenost mezi náboji q_i a q_j a n je počet nábojů. Pokud si v šestiúhelníku označíme sousední vzdálenost r_1, vzdálenost ob jeden vrchol r_2 a vzdálenost protějších bodů r_3, můžeme psát pro náboje $q_i = e = 1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$

$$E_\mathrm{p} = 6\cdot\frac{1}{2}ke^2\left(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)\,.$$

Vyjádříme si vzdálenosti v násobcích hledané vzdálenosti r, tedy

$$r_2 = \sqrt{3}r\,,\quad r_3 = 2r\,.$$

Potom položíme do rovnosti $E_\mathrm{k} = E_\mathrm{p}$ a vyjádříme z tohoto vztahu r

$$\frac{3ke^2}{r}\left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right) = 3m_\mathrm{e}v^2\,,\, r = \frac{ke^2}{m_\mathrm{e}v^2}\left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)\,.$$

Po dosazení daných i dohledaných hodnot dostáváme výsledek $r \doteq 9{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.37 ... Achilles a želva

Optické vlákno se skládá z jádra o průměru $d = 50\,\mathrm{\mu m}$ o indexu lomu $n_1 = 1{,}460$ a obalu o indexu lomu $n_2 < n_1$. Paprsek se v jádře šíří díky totálnímu odrazu. Měřením na vlákně délky $l = 500\,\mathrm{m}$ bylo zjištěno, že časový rozptyl na přijímací straně způsobený šířením paprsků po různých drahách je $\Delta t = 20\,\mathrm{ns}$. Určete index lomu n_2 obalu. Rychlost světla ve vakuu je $c = 2{,}997\,9 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V optickém vláknu nedochází k disperzi světla. *Michaleus.*

První paprsek, který dorazí, se šíří po přímé dráze v jádře, čemuž odpovídá čas $n_1 l/c$. Poslední paprsek se odráží od rozhraní právě pod mezním úhlem α, z geometrie úlohy je jeho dráha $l' = l/\sin\alpha$. V případě totálního odrazu platí $n_2 = n_1 \sin\alpha$, takže ze znalosti Δt můžeme vyjádřit

$$n_2 = n_1 \frac{l n_1}{c\Delta t + l n_1}\,.$$

Po dosazení hodnot ze zadání máme $n_2 \doteq 1{,}448$.

Michal Koutný
michal@fykos.cz

Úloha FoL.38 ... nasáváme

Spočtěte maximální poloměr olověné kuličky (v milimetrech), kterou jsme schopni nasát vysavačem o sacím výkonu $200\,\mathrm{W}$ s hadicí, jejíž kruhové ústí má průměr $6\,\mathrm{cm}$. Pro jednoduchost uvažujte, že kulička se již vznáší ve vzduchu daleko od podlahy. Hustotu vzduchu, resp. olova položte $\varrho = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, resp. $\varrho_\mathrm{Pb} = 11\,340\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Kuba si vysál flešku.*

Nejdříve vztáhněme sací výkon P vysavače k velikosti ústťové rychlosti v nasávaného vzduchu. Označíme-li ϱ hustotu vzduchu a $A = \pi d^2/4$ plochu ústťového průřezu hadice (d je průměr ústí), potom motor vysavače urychluje za jednotku času vzduch o hmotnosti $\mu = \varrho A v$ na rychlost v. Máme tedy

$$P = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\varrho A v^3\,,$$

takže

$$v = \left(\frac{2P}{\varrho A}\right)^{\frac{1}{3}}\,.$$

Nezbývá než porovnat velikosti Newtonovské odporové síly (kalkulací Re se lze přesvědčit o oprávněnosti) a tíhové síly působící na kuličku o poloměru r, hustotě ϱ_{Pb} a odporovém koeficientu C (jelikož se již kulička vznáší daleko od jiných překážek, stačí uvažovat, že je obtékána proudem vzduchu o rychlosti v), tedy

$$\frac{4}{3}\pi\varrho_{\mathrm{Pb}}gr^3 \leq \frac{1}{2}\varrho C\pi r^2\left(\frac{8P}{\varrho\pi d^2}\right)^{\frac{2}{3}} ,$$

takže dostaneme

$$r \leq r_{\max} = \frac{3}{8g}C\left(\frac{8P}{\varrho\pi d^2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{Pb}}} .$$

Číselně pro odporový koeficient koule $C = 0{,}5$ máme $r_{\max} \doteq 4{,}9\,\mathrm{mm}$.

Kuba Vošmera
`kuba@fykos.cz`

Úloha FoL.39 ... pukni vzteky

Kiki našla gumičku a nevěděla, kam ji uložit, tak ji dala Nárymu kolem hlavy. Gumička má v klidovém stavu obvod $l_0 = 15\,\mathrm{cm}$, kolem Náryho hlavy $l = 55\,\mathrm{cm}$. Gumička má čtvercový průřez s konstantní délkou strany $w = 2\,\mathrm{mm}$. Naivně předpokládejme, že se chová hookeovsky a má Youngův modul pružnosti $E = 50\,\mathrm{MPa}$. Jakým tlakem (v kPa) bude na Náryho hlavu působit? Vězte, že Náryho hlava je dokonale kulatá a gumička leží na hlavní kružnici.

Mirek se koukal, jak puká meloun.

Jelikož podle zadání smíme použít velmi zjednodušující předpoklad, že gumička podléhá v zadaném rozsahu deformace Hookeovu zákonu, je na Náryho hlavě gumička v každém bodě napínána silou

$$F = w^2E\frac{l-l_0}{l_0} .$$

Potřebujeme zjistit, jakou radiální silou působí délkový element gumičky $\mathrm{d}l$ na Náryho hlavu. Středový úhel příslušející oblouku $\mathrm{d}l$ označme ϑ. Každý konec oblouku je napínán silou $\boldsymbol{F}$ v tečném směru, oblouk tedy tahá do středu síla o velikosti

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{r}} = 2F\sin\frac{\vartheta}{2} .$$

V polárních souřadnicích zapíšeme délku oblouku jako $\mathrm{d}l = R\vartheta$, kde R je poloměr kružnice s obvodem l. Plošný element na styku Náryho hlavy a gumičky je $\mathrm{d}S = wR\vartheta$, po vyjádření poloměru pomocí obvodu

$$\mathrm{d}S = \frac{\vartheta lw}{2\pi} .$$

Tlak v libovolném styčném bodě na hlavě poté vyjádříme jako limitu[2]

$$p = \lim_{\vartheta\to 0}\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}S} = \lim_{\vartheta\to 0}\frac{2F\sin(\vartheta/2)}{\vartheta lw/(2\pi)} = \frac{2\pi F}{lw} = \frac{2\pi w^2E(l-l_0)}{ll_0w} = 2\pi wE\left(\frac{1}{l_0}-\frac{1}{l}\right) .$$

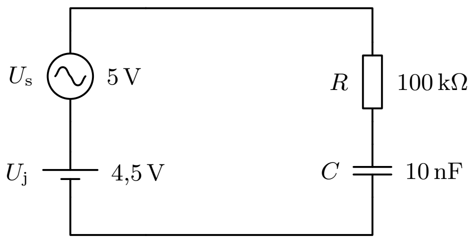
[2]Správně bychom měli provádět limitu ve dvou rozměrech, aby se z plošky stal skutečně bod, ve kterém tlak stanovujeme. Ve zbylém rozměru se však nic zajímavého neděje.

Po číselném dosazení dostaneme zaokrouhleně $p \doteq 3{,}05\,\mathrm{MPa}$. Správnost tohoto výsledku je však diskutabilní, neboť materiálové chování gumičky je ve skutečnosti složitější.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.40 ... striedavo-jednosmerny 2

Máme obvod na obrázku, jednosměrný zdroj ma napětí $U_\mathrm{j} = 4{,}5\,\mathrm{V}$*, střídavý amplitudu* $U_\mathrm{s} = 5\,\mathrm{V}$ *a frekvenci* $f = 50\,\mathrm{Hz}$*. Odpor rezistoru je* $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$ *a kapacita kondenzátoru* $C = 10\,\mathrm{nF}$*. Jaká je maximální hodnota náboje na kondenzátoru v* nC*?* *Xellos stále nerad brokolici.*



Obr. 6: Schéma zapojení obvodu.

Dva zdroje sú chyták – všetky prvky v obvode sú lineárne, preto ho môžeme vnímať ako superpozíciu (súčet) dvoch obvodov – jedného s jednosmerným a druhého so striedavým zdrojom. Náboj na kondenzátore je súčtom nábojov z oboch obvodov. Ako už vieme, v obvode s jednosmerným zdrojom je konštantná hodnota $Q_\mathrm{j} = CU_\mathrm{j}$.

Obvod so striedavým zdrojom je zložitejší, lebo nemôžeme ignorovať rezistor. Na to, aby sme našli maximálny náboj na kondenzátore, musíme hľadať maximálne napätie na ňom. Okamžité napätie na kondenzátore u_c vypočítame podľa 2. Kirchhoffovho zákona pomocou okamžitých napätí na striedavom zdroji u_s a rezistore u_r ako $u_\mathrm{c} = u_\mathrm{s} - u_\mathrm{r} = u_\mathrm{s} - jR$ (j je okamžitý prúd). Obvod má impedanciu $Z = R + 1/(\mathrm{i}\omega C)$ a platí $j = u_\mathrm{s}/Z$, teda

$$u_\mathrm{c} = u_\mathrm{s}\left(1 - \frac{R}{Z}\right) = u_\mathrm{s}\frac{1}{1 + \mathrm{i}R\omega C} = u_\mathrm{s}\frac{1}{1 + 2\mathrm{i}\pi fRC}$$

a pre maximálnu hodnotu platí

$$U_\mathrm{c} = U_\mathrm{s}\left|\frac{1}{1 + 2\mathrm{i}\pi fRC}\right| = \frac{U_\mathrm{s}}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}\,.$$

Takže maximálny náboj na kondenzátore je

$$Q = C\left(U_\mathrm{j} + \frac{U_\mathrm{s}}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}\right) \doteq 92{,}7\,\mathrm{nC}\,.$$

V obvode so striedavým prúdom ale nastáva fázový posun, ktorý spôsobuje, že toto maximum nenastáva v rovnakom čase ako maximum napätia na zdroji.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FoL.41 ... sanitka

Verča si chtěla hrát na sanitku, proto si vzala houkající sirénu a rozběhla se od Karla směrem k vratům rychlostí $v = 7\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Karel, který celou situaci se zájmem pozoruje, slyší rázy o frekvenci $f = 6\,\mathrm{Hz}$. Jaká je frekvence f_0 sirény? Uvažujte, že rychlost zvuku ve vzduchu je $v_\mathrm{z} = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. *Verča už začíná z té fyziky bláznit.*

Rázy, které Karel slyší, vznikají složením dvou vln – přímé a odražené od vrat. Protože se zdroj zvuku pohybuje, dochází k Dopplerovu jevu, a proto se budou frekvence obou vln lišit od frekvence sirény. Frekvence f_1 přímé vlny bude nižší (zdroj zvuku se od pozorovatele vzdaluje) podle vztahu pro $v \ll v_\mathrm{z}$

$$f_1 = f_0 \left(1 - \frac{v}{v_\mathrm{z}}\right) .$$

Naopak frekvence f_2 odražené vlny bude větší (siréna se k vratům přibližuje s frekvencí f_2 a odrazí se od nich bez změny této frekvence),

$$f_2 = f_0 \left(1 + \frac{v}{v_\mathrm{z}}\right) .$$

Amplituda A vlny, kterou Karel slyší, se dá napsat jako

$$A(t) = A_0 \left(\cos\left(2\pi f_1 t\right) + \cos\left(2\pi f_2 t + \varphi\right)\right) ,$$

kde A_0 je amplituda původní vlny a φ fázový posuv jedné vlny vůči druhé. Pomocí vzorce pro součet kosinů dostaneme

$$A(t) = 2A_0 \cos\left(\frac{2\pi(f_1 + f_2) + \varphi}{2} t\right) \cos\left(\frac{2\pi(f_1 - f_2) - \varphi}{2} t\right) .$$

První kosinus má frekvenci $(f_1 + f_2)/2 = f_0$, která je moc vysoká, rázy budou tedy vznikat díky druhému kosinu. Jelikož lidské ucho vnímá jenom změny jeho absolutní hodnoty, uplynou za jednu periodu tohoto kosinu dva rázy a frekvence rázů bude dvojnásobkem jeho frekvence $|f_1 - f_2|/2$. Pak platí

$$f = f_2 - f_1 = f_0 \frac{2v}{v_\mathrm{z}} ,$$

z čehož můžeme vyjádřit hledanou frekvenci f_0

$$f_0 = f \frac{v_\mathrm{z}}{2v} .$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme, že frekvence sirény je $525\,\mathrm{Hz}$.

Veronika Dočkalová
`verca@fykos.cz`

Úloha FoL.42 ... polopropusť

Máme dvě rovinná polopropustná zrcadla, která chceme umístit několik centimetrů za sebe a určit, jaká část světelného záření projde touto soustavou. První zrcadlo propustí $t_1 = 2/3$ na něj dopadajícího záření, pokud je samostatně umístěné. Druhé stejně tak propustí $t_2 = 1/3$

dopadajícího záření. Jaká část světelného záření T tedy projde soustavou těchto dvou rovnoběžně umístěných zrcadel? Při dopadu záření na zrcadlo nedochází k energetickým ztrátám.

Karel si říkal, co to asi za komunismu znamenalo „nastavit zrcadlo“.

Nejprve si uvědomíme, že máme v zadání zadané koeficienty transmise (průchodu) t_i a pro koeficienty reflexe (odrazu) platí $1 = t_i + r_i \Rightarrow r_i = 1 - t_i$, kde i je číslo zrcadla. Koeficient reflexe nám udává, jaká část záření se od daného zrcadla odrazí. První, co by nás mohlo napadnout je, že projde jenom ta část záření, která prošla nejprve prvním zrcadlem a následně druhým, a to bez odrazu, tedy $T_1 = t_1 t_2$. Toto je ale pouze první člen toho, co projde skrz. Světlo se totiž může mezi zrcadly ještě několikrát odrazit, tedy přesněji může se odrazit vždy nejprve od druhého, pak od prvního a pak to zopakovat teoreticky libovolněkrát, přičemž se odrazí od každého zrcadla stejněkrát. Koeficient transmise pro naši soustavu zrcadel tedy bude

$$T = t_1 t_2 + t_1 r_2 r_1 t_2 + t_1 r_2 r_1 r_2 r_1 t_2 + \cdots = t_1 t_2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^i = t_1 t_2 \frac{1}{1 - r_1 r_2}\,.$$

Z tohoto vzorečku vidíme, že celkový koeficient transmise T nezávisí na pořadí zrcadel. To samé bychom zjistili pro celkový koeficient reflexe $R = 1 - T$. Můžeme dopočítat koeficienty reflexe a vyjádřit T pomocí t_1 a t_2

$$T = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2 - t_1 t_2} = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - 1} = \frac{2}{7} \doteq 0{,}286\,.$$

Koeficient transmise naší soustavy dvou zrcadel je 0,286.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.43 ... maglev podomácku

Mišo má rád vlaky a moc by si přál projet se v Maglevu, vlaku pohybujícím se na magnetickém polštáři. A aby kvůli tomu nemusel cestovat daleko do zahraničí, rozhodl se, že si takový vlak sestrojí sám. K vytvoření magnetického polštáře hodlá použít sérii elektromagnetů tvaru U. *Na jádře každého z nich je navinuta cívka s $N = 100$ závity. Průřez jádra je po celé délce konstantně $S = 5\,\mathrm{cm^2}$, délka střední siločáry uvnitř cívky je $l = 20\,\mathrm{cm}$ a relativní permeabilita jádra je $\mu_\mathrm{r} = 1\,000$. Aby otestoval sílu magnetů, přiloží Mišo na oba konce jednoho z magnetů ocelový trámek, cívku zapojí a pokusí se trámek odtrhnout. Jaký proud musel cívkou procházet, jestliže bylo k odtržení potřeba síly $F = 100\,\mathrm{N}$? Permeabilita vzduchu je přibližně stejná jako permeabilita vakua $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$. Hmotnost trámku zanedbejte.*

Mirek hledal „praktické“ využití pro úlohy ze cvičení.

Sílu potřebnou pro odtržení si vyjádříme jako

$$F = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\,,$$

kde E je energie magnetického pole cívky. Velikost magnetického pole odvodíme na základě Ampérova zákona, dostaneme

$$B = \mu_\mathrm{r} \mu_0 \frac{NI}{l}\,,$$

kde I je proud procházející cívkou. Hustota energie magnetického pole w vně cívky je dána vztahem

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}\,.$$

Jestliže si element objemu označíme $\mathrm{d}V = 2s\mathrm{d}x$, můžeme vyjádřit

$$\mathrm{d}E = w\mathrm{d}V = 2Sw\mathrm{d}x\,,$$

což po převedení dx nalevo dává

$$F = 2Sw = \frac{SB^2}{\mu_0}\,.$$

Zbývá dosadit za magnetické pole a vyjádřit proud

$$I = \frac{l}{N\mu_\mathrm{r}}\sqrt{\frac{F}{\mu_0 S}} = 0{,}798\,\mathrm{A}\,.$$

Mišo musel na cívku přivést proud $I = 0{,}798\,\mathrm{A}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.44 ... akrece je mainstream

Podle některých teorií se mezi Marsem a Jupiterem nacházela desátá planeta sluneční soustavy Phaeton. Údajně měla být od Slunce vzdálena asi $D_\mathrm{P} = 2{,}5\,\mathrm{au}$, její poloměr byl $r_\mathrm{P} = 1\,000\,\mathrm{km}$. Určete, jaká bude na povrchu Phaetonu teplota po ustálení radiačního ekvilibria, jestliže je jeho Bondovo albedo blízké Zemi, $A = 0{,}3$ (taktéž i emisivita je podobná jako u Země, tedy přibližně 1). Phaeton existoval v dávných dobách, kdy mělo Slunce povrchovou teplotu $T_\mathrm{S} = 5\,000\,\mathrm{K}$ a poloměr $r_\mathrm{S} = 6\cdot 10^5\,\mathrm{km}$. *Mirek přemýšlí, kam se přestěhuje.*

Hlavním zdrojem zářivé energie v našem slunečním systému je Slunce. Sluneční výkon spočítáme ze Stefan-Boltzmannova zákona

$$P_\mathrm{S} = 4\pi r_\mathrm{S}^2\sigma T_\mathrm{S}^4\,,$$

kde $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ je Stefan-Boltzmannova konstanta. Na Phaeton z něj dopadá výkon P' úměrný ploše, kterou planeta zabírá na sféře o poloměru D_P, tedy

$$P_\mathrm{inc} = P_\mathrm{S}\frac{\pi r_\mathrm{P}^2}{4\pi D_\mathrm{P}^2} = \pi r_\mathrm{S}^2\sigma T_\mathrm{S}^4\frac{r_\mathrm{P}^2}{D_\mathrm{P}^2}\,.$$

Bondovo albedo udává zlomek výkonu, který je povrchem planety odražen, přijat je tedy pouze výkon

$$P = P_\mathrm{inc}(1 - A)\,.$$

Ve stavu radiační rovnováhy musí být přijatý výkon roven výkonu

$$P_\mathrm{P} = 4\pi\sigma r_\mathrm{P}^2 T_\mathrm{P}^4\,,$$

který vyzařuje samotná planeta. Emisivitu Země ve výpočtu neuvažujeme, je dostatečně blízká jedničce. Máme tedy rovnici

$$\pi r_\mathrm{S}^2\sigma T_\mathrm{S}^4\frac{r_\mathrm{P}^2}{D_\mathrm{P}^2}(1 - A) = 4\pi\sigma r_\mathrm{P}^2 T_\mathrm{P}^4\,,$$

z níž vyjádříme hledanou teplotu

$$T_\mathrm{P} = T_\mathrm{S} \sqrt[4]{\frac{r_\mathrm{S}^2}{4D_\mathrm{P}^2}(1 - A)}\,.$$

Číselně vychází $T_\mathrm{P} \doteq 130\,\mathrm{K}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.45 ... vlnivý elektron

Jaká bude vlnová délka elektronů, pokud bychom je urychlili elektrickým polem z klidu pomocí potenciálového rozdílu $60\,\mathrm{kV}$*?* *Kiki a její základy kvantovky pro psy.*

Pro řešení využijeme de Broglieho vztah $\lambda = h/p$, kde h je Planckova konstanta a p je hybnost elektronu, kterou musíme určit. Kinetická energie, kterou elektron získá při daném potencionálovém rozdílu $\Delta\varphi$, je $E_\mathrm{k} = e\Delta\varphi$, kde e je elementární náboj. Celková energie elektronu s klidovou hmotností m_e bude pak $E = E_0 + E_\mathrm{k}$, kde $E_0 = m_\mathrm{e}c^2$ je jeho klidová energie. Mezi energií E a hybností p platí vztah $(cp)^2 + E_0^2 = E^2$, z čeho vyjádříme $p = \sqrt{(m_\mathrm{e}c + e\varphi/c)^2 - (m_\mathrm{e}c)^2}$ a vlnovou délku dopočteme jako

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\left(m_\mathrm{e}c + \frac{e\varphi}{c}\right)^2 - (m_\mathrm{e}c)^2}} = 4{,}87 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}\,.$$

Vidíme, že elektron je prakticky bodový a taky, že vlnová délka s rostoucím napětím klesá; možná v protikladu s intuicí, rychlejší částice nebude „širší“.

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha FoL.46 ... a bez namáčení!

Po zapnutí Cimrmanovy elektrické valchy se z mýdlového roztoku, v němž byly valcha a prádlo ponořeny, uvolnilo několik mýdlových bublin. Některé po chvíli praskly, jiné dokázaly vyletět do poměrně velkých výšek. Bublina-rekordman dolétla do výšky $H = 1\,500\,\mathrm{m}$ *nad zemí. Zjistěte, kolikrát se po výstupu zvětšil její objem. Pro výpočet závislosti tlaku na výšce vyjděte z aerostatické rovnováhy atmosféry a stavové rovnice ideálního plynu. Teplota se mění s výškou lineárně podle vztahu* $T(h) = T(0) - kh$*, kde* $k = 0{,}006\,5\,\mathrm{K\cdot m^{-1}}$*. Tlak a teplota u země jsou* $p(0) = 101\,\mathrm{kPa}$*,* $T(0) = 25\,\mathrm{^\circ C}$*, molární hmotnost vzduchu je* $M = 29{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$*. Předpokládejte rovnost tlaků a teplot v bublině a v okolní atmosféře.* *Mirek počítal při praní ponožek.*

Ze stavové rovnice ve tvaru

$$\varrho = \frac{pM}{RT}$$

dosadíme do diferenciálního vyjádření závislosti tlaku na výšce

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\varrho g$$

a dostaneme diferenciální rovnici prvního řádu v separovaném tvaru

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{gM}{RT}\mathrm{d}h = -\frac{gM}{R(T(0)-kh)}\mathrm{d}h\,.$$

Integrace nám spolu s počátečními podmínkami dá vztah pro výpočet tlaku v dané nadmořské výšce

$$p = p(0)\left(1-\frac{kh}{T(0)}\right)^{gM/Rk}\,.$$

Pomocí stavové rovnice v klasickém tvaru $pV/T = \mathrm{konst}$ pak nalezneme hledaný poměr objemů

$$\frac{V(h)}{V(0)} = \frac{T(h)p(0)}{T(0)p(h)} = 1{,}15\,.$$

Objem bubliny se zvětšil 1,15krát.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.47 ... nabitá spirála

Nevodivá nabitá spirála je popsána parametrickou rovnicí v rovině, v kartézských souřadnicích jde o množinu bodů $\{[l_0 t\sin\ln t, l_0 t\cos\ln t], t>0\}$. *Délková hustota náboje je v řeči parametru* t *rovna* $\varrho(t) = \varrho_0 t\exp(-t^2)$. *Určete elektrický potenciál v počátku této spirály v jednotkách* ϱ_0/ε_0. *Spirála je umístěná ve vakuu.* *Vymyslel Janči a ještě to drze přiznává.*

Najprv je potrebné určiť dĺžku špirály prislúchajúcu zmene t o $\mathrm{d}t$. Pythagorovou vetou

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = l_0\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= l_0\sqrt{(\sin\ln t+\cos\ln t)^2+(\cos\ln t-\sin\ln t)^2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}l_0\,\mathrm{d}t\,.$$

Vzdialenosť bodu špirály s parametrom t je jednoducho $r(t) = l_0 t$, môžeme teda rovno integrovať, aby sme dostali potenciál

$$\varphi = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varrho(t)\mathrm{d}l}{r(t)} = \frac{\sqrt{2}\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}} \approx 0{,}099\,7\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\,.$$

Elektrický potenciál v počátku špirály je $0{,}099\,7\,\varrho_0/\varepsilon_0$.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha FoL.48 ... mytí nádobí

Verča ráda myje nádobí. Když má hotovo, vezme do ruky lodičku (dřevěnou obdélníkovou destičku) o tloušťce $b = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ *a plošných rozměrech* $l = 10\,\mathrm{cm}$, $w = 5\,\mathrm{cm}$. *Položí ji do vody v dřezu, v níž je saponát, tak, že po délce* l *je orientována ve směru osy* x *a po šířce* w *ve směru osy* y. *Povrchové napětí ve směru* x *roste podle vztahu* $\sigma(x) = \sigma_0 + xs$, *ve směru* y *je* $\sigma(y) = \sigma_0$, *kde* $\sigma_0 = \mathrm{konst}$ *a* s *je gradient povrchového napětí. Určete, s jakým zrychlením se začne lodička* *pohybovat, jestliže její hustota je $\varrho = 800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $\sigma_0 = 30\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$, $s = 80\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-2}}$. Zrychlení ve směru rostoucího povrchového napětí vyznačte v odpovědi znaménkem plus, opačný směr znaménkem mínus. Úhel mezi boční hranou loďky a povrchem vody na styku s ní je $\beta = 45^\circ$. Vychýlení loďky z vodorovné polohy zanedbejte.*

Mirek na soustředění pozoroval, jak účastníci myjí nádobí.

Úloha je podstatně zjednodušena skutečností, že loďka má obdélníkový tvar a její hrany jsou orientovány rovnoběžně se souřadnicovými osami. Vzhledem k tomu, že povrchové napětí se mění pouze ve směru jedné z os, lze výslednou hnací sílu určit z rozdílů sil na přední a zadní hraně loďky (síly působící na boční hrany se vykompenzují). Síly musíme násobit faktorem $\sin\beta$, protože svislá složka síly se vyrovná s tíhovou silou loďky, k pohybu po hladině přispívá pouze horizontální složka.

Povrchové napětí představuje sílu působící na délkový element, v našem případě se jedná o délku kratší hrany w. Hnací síla má velikost

$$(F(l) - F(0))\sin\beta = ((\sigma_0 + (x+l)s) - (\sigma_0 + xs))\, w\sin\beta = wls\sin\beta\,,$$

tato síla je kladná, pohyb se tedy uskutečňuje ve směru rostoucího povrchového napětí. Hmotnost loďky je $m = \varrho wlb$, proto

$$a = \frac{s\sin\beta}{\varrho b}\,.$$

Číselně $a \doteq 0{,}014\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.49 ... zesilujeme

Vypočítejte zesílení obvodu na obrázku. Zesílení je definováno jako $a = U_{\text{výstup}}/U_{\text{vstup}}$ (včetně znaménka; napětí počítáme vůči zemi). Všechny rezistory na obrázku mají odpor $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$. Operační zesilovač považujte za ideální.

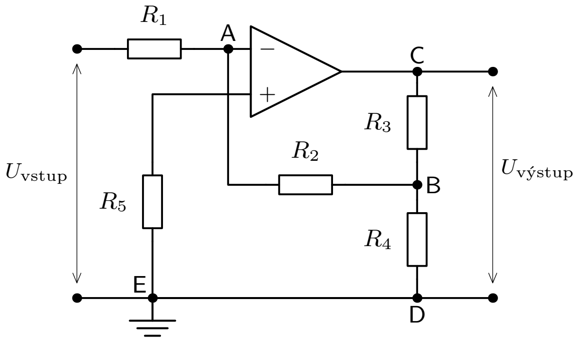
Nápověda *K vyřešení této úlohy vám bude dostačovat Ohmův zákon, první Kirchhoffův zákon a následující informace: Trojúhelníkový symbol v obvodu značí operační zesilovač. Vše, co o něm potřebujete pro vyřešení této úlohy vědět, je to, že má dva vstupy (označené − a +) a jeden výstup (ve třetím vrcholu trojúhelníku), přičemž se chová následovně:*

- *žádný proud neteče dovnitř ani ven žádného ze vstupů,*
- *operační zesilovač se snaží udržet takové napětí na svém výstupu, aby rozdíl napětí na jeho vstupech byl nulový.*

Pikoš rád zkouší složitá zapojení.

Vstup − se označuje invertující, vstup + neinvertující. Podobné zapojení se označují jako zapojení se zpětnou vazbou.

Nejprve potřebujeme zjistit, jaké je napětí na vstupech operačního zesilovače. Využijeme toho, že do jeho vstupů ani z nich neteče žádný proud, proud rezistorem R_5 je tedy nulový a dle Ohmova zákona je na něm tedy nulové napětí, tedy $U_5 = 0\,\mathrm{V}$. Proto napětí vůči zemi (bodu E) na invertujícím vstupu zesilovače je nulové. Protože se operační zesilovač snaží, aby napětí mezi jeho vstupy bylo nulové, je nulové i napětí mezi zemí a invertujícím vstupem zesilovače (tedy mezi body A a E).



Obr. 7: Schéma obvodu.

Nyní víme, že napětí mezi body A a E je nulové, napětí na rezistoru R_1 je tedy $U_1 = U_{\mathrm{vstup}}$. Dle Ohmova zákona jím pak teče proud $I_1 = U_1/R_1 = U_{\mathrm{vstup}}/R_1$. Protože z bodu A proud nemůže téct do operačního zesilovače (viz nápověda v zadání), rezistorem R_2 teče proud $I_2 = I_1$. Dle Ohmova zákona je pak napětí na rezistoru R_2 rovno $U_2 = R_2 I_2 = U_{\mathrm{vstup}} R_2/R_1$. Protože napětí mezi bodem A a zemí je nulové, pak napětí mezi bodem B a zemí je $U_4 = U_{\mathrm{vstup}} R_2/R_1$, přičemž potenciál v bodě B je nižší než v bodě E.

Vzhledem k tomu, že v bodě B je nižší potenciál než v bodě D, teče tímto směrem proud, který je dle Ohmova zákona roven $I_4 = U_4/R_4 = U_{\mathrm{vstup}} R_2/(R_1 R_4)$.

Do bodu B teče proud I_2 rezistorem R_2 a proud I_4 rezistorem R_4. Dle prvního Kirchhoffova zákona tedy rezistorem R_3 teče proud $I_3 = I_2 + I_4 = U_{\mathrm{vstup}}[1/R_1 + R_2/(R_1 R_4)]$, napětí na něm je $U_3 = R_3 I_3 = U_{\mathrm{vstup}} R_3 [1/R_1 + R_2/(R_1 R_4)]$, přičemž vzhledem ke směru proudu je potenciál v bodě C nižší než v bodě B.

Napětí na výstupu již snadno vypočítáme jako $U_{\mathrm{výstup}} = -(U_4 + U_3)$ (záporné znaménko proto, že v bodě C je nižší potenciál než v bodě B a v bodě B je nižší potenciál než v bodě D), tedy

$$U_{\mathrm{výstup}} = -U_{\mathrm{vstup}} \left[\frac{R_2}{R_1} + R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_4} \right) \right] ,$$

zesílení tedy je

$$a = \frac{U_{\mathrm{výstup}}}{U_{\mathrm{vstup}}} = -\frac{R_2 R_4 + R_3 R_4 + R_2 R_3}{R_1 R_4} ,$$

mají-li všechny rezistory stejnou hodnotu, zesílení je $a = -3$.

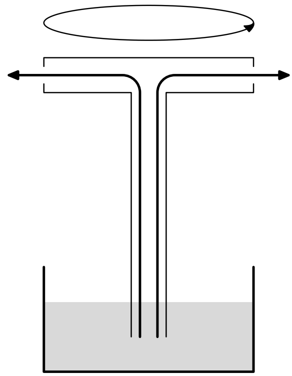
Tomáš Pikálek
`pikos@fykos.cz`

Úloha FoL.50 . . . zaléváme

V bazénku naplněném vodou máme upevněnou trubici, která má plochu průřezu $S_1 = 4\,\mathrm{cm}^2$*. Na ní je nahoře upevněná válcová nádoba, která má po obvodu malý počet otvorů. Celá tato konstrukce se pomocí motoru otáčí a ve válcové nádobě jsou radiálně umístěné přepážky, které nutí vodu v nádobě rotovat s ní. Nádoba má poloměr* $r = 10\,\mathrm{cm}$ *a otvory mají dohromady průřez* $S_2 = 5\,\mathrm{mm}^2$*. Otvory v zásobníku jsou nejprve zavřené a zásobník i trubice jsou celé* *naplněny vodou. Zásobník je roztočen úhlovou rychlostí* $\omega = 25\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ *a až poté jsou otvory otevřeny tak, aby mohla voda proudit ven. Určete rychlost* v *s kterou voda vytéká z otvorů v zásobníku vzhledem k laboratornímu systému (nerotujícímu se zásobníkem). Tlak vzduchu je* $p_0 = 1\,015\,\mathrm{hPa}$, *tíhové zrychlení uvažujte* $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ *a výška, ve které jsou otvory, je* $h = 20\,\mathrm{cm}$. *Hustotu vody vezměte* $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. *Faleš volně inspirován Estonsko-Finskou olympiádou, která měla špatně řešení, i když jen v průběhu.*

Nejprve určíme přetlak p (vůči tlaku vzduchu), který bude vytlačovat vodu na okraji nádoby. Tíha vody, která je vytlačována, bude působit tlakem $p_\mathrm{t} = -\varrho g h$. Rotace zásobníku bude ale odtlačovat vodu z jeho středu do okrajů, tím zvyšovat tlak po obvodu a naopak zmenšovat ten ve středu, a tak nasávat další vodu. Vzhledem k rotaci kolem osy symetrie se jedná o odstředivou sílu. Na element vody o hmotnosti m vzdálený r od osy působí síla dána vztahem

$$F_\mathrm{o} = m\omega^2 r\,.$$



Obr. 8: Schéma vodní pumpy.

Přetlak je efektivně rozdíl energie (potenciální) na jednotku objemu, který voda překoná. Konzervativní síla je (záporně vzatým) gradientem potenciální energie. Tedy je to změna potenciální energie, infinitesimálně derivace. Opačný proces, který potřebujeme my, je integrace – změnu odstředivé potenciální energie od trubice (ta je tak malá, že můžeme integrovat od středu) k okraji zásobníku vypočteme jako

$$U_\mathrm{o} = \int_0^r m\omega^2 r \mathrm{d}r = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2\,.$$

Tlak potom bude tato energie na jednotku objemu, tedy

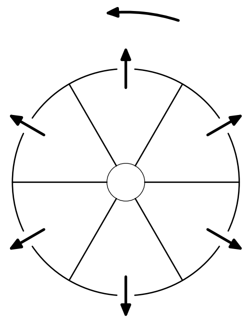
$$p_\mathrm{o} = \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2\,.$$

Přetlak na okraji zásobníku bude

$$\begin{aligned} p &= p_\mathrm{t} + p_\mathrm{o} \\ &= -\varrho g h + \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2\,. \end{aligned}$$

Rychlost výtoku z otvorů pak určíme z Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2}\varrho v_\mathrm{r}^2 = p = \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2 - \varrho g h\,.$$



Obr. 9: Pohled na válcovou nádobu shora.

Tedy

$$v_\mathrm{r}^2 = \omega^2 r^2 - 2gh$$

je kvadrát rychlosti vzhledem k soustavě rotující se zásobníkem. Abychom se dostali do laboratorní soustavy, musíme odtransformovat rotaci. Mezi rychlostí v inerciálním systému (index i) a rotujícím systému (index r) je vztah

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{i} = \boldsymbol{v}_\mathrm{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\,.$$

Musíme si nyní uvědomit, že $\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$ míří radiálně od středu zásobníku, zatímco vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ míří ve směru osy rotace, a tak člen $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ míří ve směru rotace (tečně okraji válce tvořícího zásobník). Výslednou velikost rychlosti $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ tak určíme vektorovým sčítáním (Pythagorovou větou) jako

$$v_\mathrm{i}^2 = v_\mathrm{r}^2 + (\omega r)^2 \;,$$

odtud už snadno zjistíme, že

$$v_\mathrm{i} = \sqrt{2\left(\omega^2 r^2 - gh\right)}\,.$$

Číselně dostaneme $v_\mathrm{i} \doteq 2{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha M.1 ... ponorka

Michal plánuje cestu ponorkou z hladiny nad Mariánským příkopem (0 m n. m.) na jeho dno (10 971 m p. m.). Jak velký rozdíl v hydrostatickém tlaku (v MPa) Michalova ponorka naměří? Uvažujme, že hustota vody se nemění s hloubkou. Počítejte s konstantami $\varrho_\mathrm{voda} = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. *Zuzka přemýšlela nad ponorkou.*

Pre hydrostatický tlak p v hĺbke h platí vzťah

$$p = \varrho g h\,,$$

kde ϱ je hustota vody. Ak tlak na hladine označíme p_2 a tlak na dne priekopy p_1, tak pre rozdiel tlakov na hladine a na dne bude platiť

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \varrho g h_1 - \varrho g h_2 = \varrho g (h_1 - h_2)\,.$$

Po dosadení nám výjde, že veľkosť zmeny hydrostatického tlaku je 110 MPa.

Zuzana Mičková
`zuzka.micko@fykos.cz`

Úloha M.2 ... zmáčený Fykosák

Pták Fykosák jede na tříkolce rychlostí $v = 10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, když k jeho nelibosti začne pršet. Nejen, že je zmáčen, ale ještě ke všemu musí zvětšit svůj výkon, aby se pohyboval stále stejně rychle. Uvažujte, že dešti je rovnoměrně vystaven povrch ptáka $S = 0{,}5\,\mathrm{m^2}$ a že za čas $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ dopadnou na každý $\mathrm{cm^2}$ průměrně 2 kapky. Jedna kapka váží $m = 0{,}1\,\mathrm{g}$. Kapky padají svisle dolů, pták se pohybuje rovnoměrně přímočaře kupředu (horizontálně). Zanedbejte to, že se pták musí hýbat vůči tříkolce. O kolik musí pták Fykosák zvýšit svůj výkon? *Faleš zmoknul.*

Pták musí kompenzovat hybnost, kterou kapkám předává ve vodorovném směru. Označme S_0 elementární plochu $1\,\mathrm{cm^2}$, na kterou dopadne $n = 2\,\mathrm{s^{-1}}$ kapky za čas.

Hybnost, kterou musí pták odevzdat kapkám za čas Δt, pak je

$$\Delta p = v \Delta M = v n m \frac{S}{S_0} \Delta t\,.$$

Výkon je práce za čas, kde práci vyjádříme pomocí síly po dráze a výkon tedy jako sílu po dráze za čas, resp. jako sílu krát rychlost

$$\Delta P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{sF}{\Delta t} = v\frac{\Delta p}{\Delta t} = v^2 nm\frac{S}{S_0}\,.$$

Číselně dostaneme $\Delta P \doteq 7{,}7\,\mathrm{W}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha M.3 ... čerpadlo

Trubice o průměru $r = 2\,\mathrm{cm}$, která je ohnutá do tvaru písmene L, *má jeden konec ponořen pod vodou, zatímco druhý ne. Její spodní část je rovnoběžně s hladinou tak, že druhá z vody trčí kolmo vzhůru. Trubicí je pohybováno ve směru, který udává spojnice od paty ohybu k ústí, které je ponořeno, a to rychlostí $v = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Do jaké výšky nad hladinu nádrže (v cm) vystoupí hladina v trubici? Tíhové zrychlení uvažujte $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.*

Faleš uviděl hezký obrázek trubky.

Dle Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + p = \mathrm{konst}\,.$$

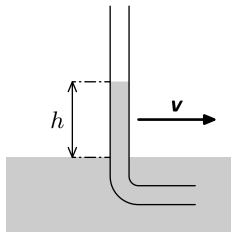
Tlak proti vtékající vodě vyvolaný vodním sloupcem je

$$p = -h\varrho g\,.$$

Odtud společně máme, že rozdíl hladin h je

$$h = \frac{v^2}{2g}\,.$$

Číselně dostáváme $h \doteq 20\,\mathrm{cm}$.



Obr. 10: Schéma trubice.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha M.4 ... pták raketťák

Ptáka Fykosáka už bolí křídla, a tak ze rozhodl, že použije fyziku a udělá si batoh s raketovým pohonem. Ten při zážehu za dobu 1 s spotřebuje 100 g paliva a má tahovou sílu 50 N. Jaká je relativní rychlost plynů vzhledem k batohu? *Faleše bolely nohy.*

Ze zákona zachování hybnosti máme pro hybnosti udělené ptákovi a plynu za čas Δt

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}v_\mathrm{r}\,,$$

kde v_r je relativní rychlost plynů vůči batohu, m je hmostnost tělesa (ptáka s batohem), Δv je změna jeho rychlosti, Δm je hmotnost plynů uniklých za čas Δt. Změna hybnosti za čas je taky tahová síla

$$F = m\frac{\Delta v}{\Delta t}\,,$$

takže pro velikost rychlosti plynů máme

$$v_{\mathrm{r}} = \frac{F\Delta t}{\Delta m}\,.$$

Číselně pak $v_{\mathrm{r}} = 500\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha E.1 ... trinity

Odpor R_x má být stejně velký jako je celkový odpor obvodu. Odpory R_1 a R_2 jsou stejné. Vyjádřete hodnotu odporu R_x jako násobek odporu $R = R_1 = R_2$.

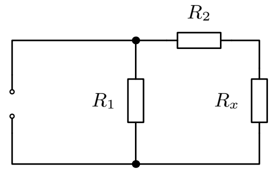
Falešovi se líbil výsledek zlatého řezu.

Stačí sestavit rovnici pro skládání odporů, která má tvar

$$xR = \frac{R\,(xR + R)}{R + (xR + R)}\,,$$

kde x je hledaný násobek známého odporu, tedy $xR = R_x$.

Řešením této kvadratické rovnice získáme dva kořeny z nichž jen jeden je kladný. Číselně máme $x \doteq 0{,}62$ (jde o zlatý řez).



Obr. 11: Schéma obvodu.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha E.2 ... Náry bojuje s čísly

Nechť se vakuem šíří rovinná elektromagnetická vlna. V určitém místě prostoru jsme měřili hodnoty elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ a magnetické indukce $\boldsymbol{B}$. Vyšly nám hodnoty $\boldsymbol{E} = (2, 3, 1)\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$, $\boldsymbol{B} = (5, -3, -1)\,\mathrm{T}$. V této úloze by nás zajímalo, kterým směrem se vlnění šíří. Tento směr najděte, směrový vektor normalizujte (vynásobte vhodným kladným číslem, aby jeho velikost byla jednotková) a pošlete nám součet těchto tří čísel.

Náry se točil a byl při tom normalizován znalostmi z teorie pole.

Protože jde o rovinnou elektromagnetickou vlnu, vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou kolmé, navíc jsou oba kolmé ke směru šíření vlny $\boldsymbol{n}$. Speciálně platí, že $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \alpha \boldsymbol{n}$, kde α je kladné číslo v jednotkách $\mathrm{m^{-1}{\cdot}s^5{\cdot}kg^{-2}{\cdot}A^2}$, jde o inverzní číslo k normalizační konstantě. Po provedení vektorového součinu získáme vektor $(0, 7, -21)\,\mathrm{m^{-1}{\cdot}s^5{\cdot}kg^{-2}{\cdot}A^2}$. Nyní ještě zbývá najít onu normalizační konstantu. Normalizační konstanta je inverze k velikosti vektoru, tedy k hodnotě $\sqrt{7^2 + (-21)^2}$. Pokud tímto číslem vydělíme náš vektor, vyjde $\left(0, 1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10}\right)$. Součet komponent vektoru numericky vychází po zaokrouhlení $-0{,}63$.

Jiří Nárožný
nahry@fykos.cz

Úloha E.3 ... Náry je pracant

Když bylo potřeba přemístit dalekohled, Náry raději přemístil z nekonečna náboj o velikosti $Q = 2\,\mathrm{C}$ do místa s elektrickým potenciálem $\varphi = 2\,\mathrm{kV}$. Jakou práci (v mJ) vykonal? Potenciál v nekonečnu uvažujte nulový. *Náry s Falešem na odborném soustředění teoretické fyziky.*

Protože v našem případě je nekonečno místo s nulovým potenciálem a práce je dána jako součin změny potenciálu a náboje, Náry vykonal práci $W = Q\varphi \doteq 4{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{mJ}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha E.4 ... kOndenzátOr

Dielektrikum mezi dvěma kruhovými deskami kondenzátoru se skládá ze dvou vrstev. První tvoří vzduch o tloušťce $d_1 = 2\,\mathrm{mm}$ a druhou plexisklo o tloušťce $d_2 = 4\,\mathrm{\mu m}$. Určete kapacitu kondenzátoru (v pF), je-li plošný obsah jeho desky $S = 2\,\mathrm{dm}^2$. Permitivita vakua je $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-2}}$.

Faleš otevřel starý sešit a nemohl přečíst jedno číslo, tak upravil rozměry.

Jedná se o dva sériově zapojené kondenzátory a jejich kapacity se skládají pomocí převrácených hodnot

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\,.$$

Odtud můžeme vyjádřit

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,.$$

Kapacita jednoho kondenzátoru je dána jako

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} S}{d}\,,$$

kde ε_r je relativní permitivita materiálu v kondenzátoru. Permitivita vzduchu je velmi dobře aproximována permitivitou vakua, a tedy její relativní permitivita je 1. Výsledná kapacita je

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r,p} S}{\varepsilon_\mathrm{r,p} d_1 + d_2}\,.$$

Pro její výpočet nám zdánlivě chybí relativní permitivita plexiskla $\varepsilon_{r,p}$. Když si ale uvědomíme, že d_2 je o tři řády menší než d_1, zjistíme, že kapacita plexiskla se vlastně vůbec neprojeví (obzvláště v požadované přesnosti jedné platné cifry). Kapacita je tedy dána kapacitou vzduchového kondenzátoru, jak jsme si mohli uvědomit již na začátku výpočtu

$$C \approx C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}\,.$$

Číselně máme $C \doteq 90\,\mathrm{pF}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha X.1 ... expandujeme

Jakou práci (v kJ) vykoná ideální plyn při izotermické expanzi, pokud je jeho počáteční objem $V_1 = 10\,\mathrm{dm}^3$ a tlak $p_1 = 1{,}0\,\mathrm{MPa}$? Jeho konečný tlak po expanzi je $p_2 = 100\,\mathrm{kPa}$.

Marek zabudol, ako mu to napadlo.

Plyn expanduje na konečný objem V_2. Výsledná práca plynu je daná vzťahom

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V\,. \tag{4}$$

Pre izotermický dej platí Boylov-Mariotteov zákon, teda

$$p_1 V_1 = pV \quad \Rightarrow \quad p = \frac{p_1 V_1}{V}\,. \tag{5}$$

Po dosadení vzťahu (5) do vzťahu (4) dostaneme

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1}{V} \, dV = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \,. \tag{6}$$

V našom prípade musíme V_2/V_1 nahradiť pomerom tlakov, ktorý získame z Boylovho-Mariotteovho zákona, teda

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} \,. \tag{7}$$

Vzťah (7) dosadíme do vzťahu (6), z čoho dostaneme vzťah pre hľadanú prácu

$$W = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \doteq 23\,\mathrm{kJ} \,.$$

Plyn vykoná prácu 23 kJ.

Marek Martaus
`martaus@fykos.cz`

Úloha X.2 ... budiž světlo

Když je Domči večer smutno, rozsvítí si svoji lampičku a z objevících se fotonů má hned lepší náladu. Kolik fotonů vyzáří stowattová žlutá lampička během jedné sekundy? Uvažujte vlnovou délku vyzařovaného světla 580 nm a 10 % účinnost lampičky, přičemž fotony o jiných vlnových délkách řadíme mezi ztráty. *Kiki nemá ráda změny času.*

Celková energie „na svícení“ E_1 lampičky je $E_1 = Pt\eta$, kde $P = 100\,\mathrm{W}$ je zadaný příkon, $t = 1\,\mathrm{s}$ je čas svícení a $\eta = 0{,}1$ je účinnost. Víme, že energii fotonu lze určit jako $E = hf = hc/\lambda$, kde f je frekvence světla, h je Planckova konstanta, c je rychlost světla a $\lambda = 580\,\mathrm{nm}$ je vlnová délka světla. Počet fotonů vyzářených lampičkou během jedné sekundy tedy můžeme určit jako

$$N = \frac{Pt\eta\lambda}{hc} \,,$$

číselně dostaneme zhruba $2{,}9 \cdot 10^{19}$ fotonů.

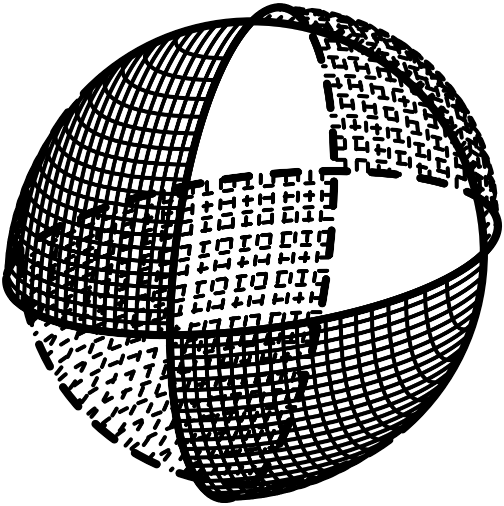
Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha X.3 ... vánoční

Pro trojrozměrný objekt přímku o *nazveme* n*-násobnou osou symetrie, pokud se objekt nezmění při otočení okolo této osy o úhel* $2\pi/n$*. Například vystřižený sedmiúhelník má jednu 7-násobnou osu symetrie, kolmou na rovinu papíru a procházející jeho středem.*

Janči na vánoce maloval koláče. Jeden z nich měl tvar koule. Janči ho rozdělil na 8 stejných částí a vymaloval každou druhou, takže se namalované části povrchu dotýkaly jen v bodech. Kolik 3-násobných os symetrie měl takovýto útvar? *Janči pomáhal v kuchyni.*

Každá os musí prechádzať stredom gule, aby sme otočením dostali opäť tú istú (neposunutú) guľu.



Obr. 12: Vánoční cukroví

Pozrime sa na obrázok – hľadané osi musia prechádzať stredmi dvoch protiľahlých "pokrivených trojuholníkov", sú teda 4. Presnejšie, guľa má bodovú grupu T_d.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha X.4 ... antichemická

Jedno z pravidel o postupném zaplňování orbitalů v atomech je Pauliho princip, který říká, že dva elektrony nikdy nemůžou být ve stejném stavu, to znamená, že v jednom orbitalu (stavu se stejnými kvantovými čísly n, l a m) mohou být maximálně dva elektrony (lišící se orientací spinu, representovaný kvantovým číslem m_s).

Představte si, že bychom toto pravidlo změnili a v jednom stavu by mohly být dva elektrony, ale tři už ne. Kolik valenčních *elektronů by potom měl neutrální atom síry, pokud by zaplňování orbitalů probíhalo ve stejném pořadí jako pro elektrony?* *Lada uvažovala o fermiónoch.*

Energetické poradie orbitálov je $1s$, $2s$, $2p$ (ďalšie orbitály sú v síre s naším upraveným Pauliho princípom prázdne). Do prvého zmestíme 4 elektróny so spinmi

$$1s:\ \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\ .$$

Valenčné elektróny sú tie zvyšné, v orbitáloch $2s$ a $2p$. Spolu má neutrálna síra 16 elektrónov, do valenčnej vrstvy musí teda ísť 12.

Mimochodom, orbitál $2s$ bude vyzerať rovnako a do (troch orbitálov) $2p$ pôjde zvyšných 8 elektrónov, aj keď by sa tam zmestilo $3 \cdot 4 = 12$.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.