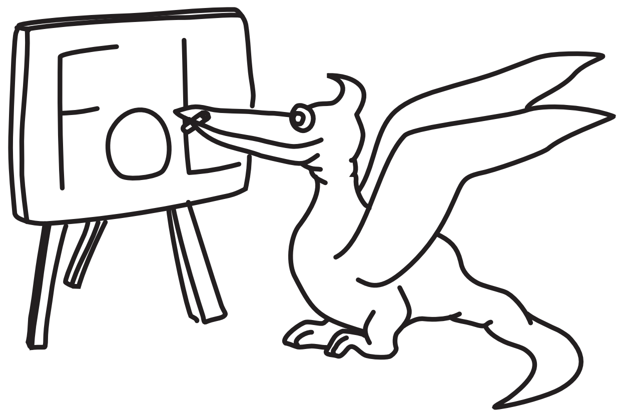
Řešení úloh 6. ročníku Fyziklání online



Úloha FoL.1 ... knihovnická

Na zemi leží sloupec 40 knih, z nichž má každá tloušťku $d = 2\,\mathrm{cm}$ *a hmotnost* $m = 1\,\mathrm{kg}$. *Knihy chceme umístit do 4 nástěnných poliček, přičemž do každé z nich se vejde naležato 10 knih a poličky se nacházejí postupně ve výškách* 100 cm, 130 cm, 160 cm *a* 190 cm. *Jakou práci musíme vykonat na přemístění knih?*

Mirek nedokázal pohnout s poličkami plnými knih.

Úloha je jednoduchá, jen je potřeba zvolit rozumný přístup a nepracovat s jednotlivými knihami, ale s těžištěm všech knih před přesunem a po přesunu. Na počátku je těžiště všech knih ve výšce $h = 40\,\mathrm{cm}$ (střed homogenního sloupce), po přesunu je těžiště ve výšce

$$h' = \frac{1}{4}\big(100\,\mathrm{cm} + 5d + 130\,\mathrm{cm} + 5d + 160\,\mathrm{cm} + 5d + 190\,\mathrm{cm} + 5d\big) = 155\,\mathrm{cm}\,.$$

Práci tedy určíme jako změnu polohové energie

$$W = \Delta E_\mathrm{p} = 40mg(h' - h) \doteq 450\,\mathrm{J}\,.$$

Na umístění knih do polic je potřeba vynaložit práci $W = 450\,\mathrm{J}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.2 ... tvrdý chlebíček

Čtvercové pšeničné pole se rozkládá na ploše 16 ha. *Firma vlastní kombajn s žací lištou širokou* 8 m. *Kombajn se pohybuje rychlostí* $5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ *a jeho spotřeba při žetí je 10 litrů na kilometr. Firma kupuje naftu za cenu 28,40 Kč za litr. Jaké budou náklady firmy na sklizení tohoto pole (zaokrouhleno na celé koruny), jestliže plat kombajnisty je 85 Kč za každou započatou hodinu? Zpoždění kombajnu při otáčení ani případný požár neuvažujte.* *Meggy měla brigádu na poli.*

Jedna strana pole má délku 400 m. Platí $400/8 = 50$, tedy kombajn musí pole po celé jeho délce přejet 50krát. Najede tak dráhu 20 000 m. Spotřebuje přitom 200 l nafty a pole je posečeno za 4 h. To znamená, že firma za naftu utratí 5 680 Kč a kombajnistovi zaplatí 340 Kč. Její náklady celkově vychází na 6 020 Kč.

Markéta Calábková
calabkovam@fykos.cz

Úloha FoL.3 ... zátačka

Olda jede po silnici rychlostí $v = 20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a má v autě na zrcátku osvěžovač vzduchu. Když projížděl zatáčkou, naklonil se osvěžovač o úhel* $\alpha = 35^\circ$. *Jaký má poloměr zatáčka, kterou Olda projížděl? Tíhové zrychlení je* $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Olda jel do zatáčky.*

Jako první si uvědomíme, že gravitační síla směřuje kolmo k silnici. Navíc, odstředivá síla je kolmá na gravitační. Dále víme, že pro odstředivou sílu platí rovnice

$$F_\mathrm{o} = ma_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r}\,.$$

Také víme, že pro tíhovou sílu platí rovnice

$$F_\mathrm{G} = mg\,.$$

Jednoduchou úvahou dojdeme k závěru, že

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{G}}\,,\\ mg\operatorname{tg}\alpha &= \frac{mv^2}{r}\,,\\ r &= \frac{v^2}{g\operatorname{tg}\alpha}\,. \end{aligned}$$

Tedy poloměr zatáčky je $r = 58{,}23\,\mathrm{m}$.

Oldřich Holcner
holcner@fykos.cz

Úloha FoL.4 ... astrální

Dr. Strange je zatvrzelý pragmatik a na mimotělní zážitky nevěří. Aby ho mniška vyvedla z omylu, udeří ho konstantní silou do hrudníku a vyrazí z něj jeho astrální tělo, které váží stejně jako Strange, tedy $m = 80\,\mathrm{kg}$. Jestliže úder (dotyk pěsti a hrudníku) trval $t = 0{,}1\,\mathrm{s}$ a astrální tělo se pohybovalo po úderu rychlostí $v = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, jakou silou musela mniška udeřit? Vlastní tělo doktora Strange se nepohne, nezachovávající se hmotnost není náš problém.

Mirek odpočíval u trailerů.

Jde o jednoduchou úlohu na impuls síly

$$F = \frac{p}{t}\,.$$

Hledaná síla je tedy

$$F = \frac{mv}{t} = 4\,000\,\mathrm{N}\,.$$

Mniška udeří Strange silou $F = 4\,\mathrm{kN}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.5 ... nevadí, že neladí

Meggy si k táboráku přinesla flétnu. Flétna je vyrobena z polymeru ABS s teplotním součinitelem délkové roztažnosti $\alpha = 9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$. Když na ni zkoušela hrát na objektu při $20\,^\circ\mathrm{C}$, její nejnižší tón měl frekvenci $349\,\mathrm{Hz}$ a flétna měla délku l. U ohně si flétnu na chvíli odložila na lavičku. Pokud je perioda zvukového vlnění jednotlivých tónů přímo úměrná délce trubice, určete frekvenci jejího nejnižšího tónu, pokud se flétna mezitím zahřála na $25\,^\circ\mathrm{C}$.

Meggy vymýšlela úlohy na soustředění.

Délkový rozdíl flétny před a po zahřátí se vypočítá podle vzorce $\Delta l = l\alpha\Delta t$. Po číselném dosazení ($\alpha$ v $\mathrm{K^{-1}}$ a Δt v K) dostaneme $\Delta l = 4{,}5\cdot 10^{-4} l$. Označme si frekvenci tónu při $20\,^\circ\mathrm{C}$

jako f_1 a frekvenci tónu při 25 °C jako f_2. Perioda je rovna převrácené hodnotě frekvence. Platí pro ně proto vztah $(1 + 4{,}5 \cdot 10^{-4}) f_2 = f_1$, odkud můžeme následně vypočítat $f_2 = 348{,}843\,\mathrm{Hz}$.

Markéta Calábková
`calabkovam@fykos.cz`

Úloha FoL.6 ... krychličky

Předpokládejte, že molekuly vody jsou krychličky, které na sebe těsně přiléhají (zcela vyplňují objem vody). Určete, kolik molekul vody se vejde do objemu $V' = 1\,\mathrm{nm}^3$. Uvažujte vodu za standardních podmínek ($T \approx 300\,\mathrm{K}$, $p \approx 1\,\mathrm{atm}$), potřebné hodnoty hustoty vody, její molární hmotnost a Avogadrovu konstantu si dohledejte (pokud je neznáte z hlavy).

Mirek nechápal, proč má takové úlohy řešit v rámci magisterského studia.

Máme hustotu vody ϱ, molární hmotnost M a známe Avogadrovo číslo N_A. Hmotnost molekuly je $m = M/N_\mathrm{A}$, objem molekuly je $V = a^3$, a tedy

$$a = \sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}} = \sqrt[3]{\frac{M}{N_\mathrm{A}\varrho}} \doteq 3{,}1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\,.$$

Do objemu $V' = 1\,\mathrm{nm}^3$ se tedy vejde molekul

$$N = \frac{V'}{a^3} \doteq 33\,.$$

V úloze jsme využívali známé přibližné hodnoty $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $N_\mathrm{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ a $M = 18\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.7 ... methan

Na dně např. Jihočínského moře se nachází tzv. klatrát methanu. Jedná se o krystaly vodního ledu, v jejichž mezerách se nachází molekuly methanu. Tyto mezery jsou přítomny i v krystalech čistého ledu, pouze nejsou vyplněny molekulami žádné látky. Chemický vzorec tohoto klatrátu je $\mathrm{CH_4 \cdot 5{,}75H_2O}$. Kolik m^3 methanu se může uvolnit do atmosféry o teplotě 0 °C a tlaku 100 kPa z $1\,\mathrm{m}^3$ klatrátu? Hustota vodního ledu je $917\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Sladké vzpomínky na Katčina středoškolská léta.

Protože se jedná o krystaly vodního ledu, jehož hustota je $917\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, nachází se v jednom metru krychlovém 917 kg ledu. Protože jeden mol vody váží 18 g, odpovídá množství ledu v metru krychlovém množství 50,9 kmol. Methanu je 5,75krát méně, tedy 8,86 kmol. Pro výpočet objemu methanu použijeme stavovou rovnici ideálního plynu

$$V = \frac{nRT}{p}\,.$$

Číselně $V \doteq 201\,\mathrm{m}^3$.

Kateřina Smítalová
`katka@fykos.cz`

Úloha FoL.8 ... udělej to zítra

Vypočtěte, jak dlouhý by musel být pozemský den, aby byla na rovníku beztíže. Poloměr Země je $R = 6\,400\,\mathrm{km}$, hmotnost Země je $M = 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, gravitační konstanta je $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}}$. Předpokládejte, že tvar Země je vždy kulový.

Mirek koukal z okna a přemýšlel, jak ten čas letí.

Gravitační zrychlení na rovníku je

$$a_\mathrm{g} = \frac{GM}{R^2}$$

a má být vyrovnáno odstředivým zrychlením na povrchu

$$a_\mathrm{o} = \omega^2 R$$

aby bylo výsledné tíhové zrychlení nulové. Máme tedy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,,$$

z čehož už vyjádříme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \doteq 5\,100\,\mathrm{s} \doteq 1{,}4\,\mathrm{h}\,.$$

Pozemský den by trval 1,4 h.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.9 ... Toricelli reloaded

Jsme na vesmírné stanici, uvnitř níž je udržován standardní atmosférický tlak $p_\mathrm{a} = 101\,\mathrm{kPa}$, a provádíme Toricelliho pokus. Vezmeme nádobu se rtutí, ponoříme do ní dlouhou zkumavku a až se naplní, tak ji postavíme svisle tak, že otevřený konec je ponořen pod hladinou rtuti v nádobce. Během experimentu se vesmírná stanice nachází dostatečně daleko od gravitačních vlivů vesmírných těles a zrychluje ve směru uzavřeného konce zkumavky (po dokončení manipulace s ní) se zrychlením o velikosti $a = 20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jakou výšku h bude mít sloupec rtuti ve zkumavce? Hustota rtuti je $\varrho = 13\,600\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Mirek byl zklamán jednoduchostí cvičení, tak úlohy vylepšoval.

Hydrostatický tlak ve zkumavce se po dokončení experimentu musí vyrovnat s tlakem okolí. Okolní tlak je $p_\mathrm{a} \doteq 101\,\mathrm{kPa}$, hydrostatický tlak spočteme podle vztahu

$$p = h\varrho a\,,$$

kde jsme obvyklé tíhové zrychlení g nahradili zrychlením lodi a. Ze srovnání tlaků

$$p_\mathrm{a} = p = h\varrho a$$

vyjádříme

$$h = \frac{p_\mathrm{a}}{\varrho a} \doteq 0{,}37\,\mathrm{m}\,.$$

Sloupec rtuti je tedy zhruba poloviční oproti výsledku experimentu prováděného na Zemi, neboť zrychlení je na stanici zhruba dvakrát větší.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.10 ... vyhodnocování efektivity

Karel a Aleš mají každý jednu homogenní cihlu, která má tvar kvádru s hranami $a \times a \times 2a$, kde $a = 5\,\mathrm{cm}$. Hmotnost každé z cihel je $m = 1\,\mathrm{kg}$. Karel položí svoji cihlu na zem a postupně ji překlápí v jednom směru vždy po kratší hraně (při pohledu z boku je na zemi střídavě delší a kratší hrana), dokud neurazí $d = 150\,\mathrm{cm}$. Aleš také přesune cihlu po dráze d, ale převrací ji přitom vždy přes delší hranu, tedy při pohledu z boku vidíme vždy čtvercovou podstavu. Cihla nepodkluzuje a její nárazy na podložku jsou nepružné. O kolik více práce vykoná Karel? Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Mirek hodnotil výkony ostatních organizátorů.*

Aby Karel přesunul cihlu ze stavu, kdy leží, do stavu, kdy stojí, musí posunout těžiště z výšky $a/2$ do výšky $a\sqrt{5}/2$, kdy cihla stojí na hraně a její těžiště je nejvýše. Zbylou část rotace už zajistí tíhová síla. Poté ji musí opět mírně zdvihnout z a do $a\sqrt{5}/2$, aby se mohla cihla překlopit zpět do polohy naležato. Během těchto úkonů se cihla posune o $3a = 15\,\mathrm{cm}$, je proto potřeba provést obě překlopení desetkrát. Celková energie, kterou Karel jakožto zdroj práce vydal, je

$$W_\mathrm{K} = 10\left(a\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) + a\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right)\right)mg = 10\left(\sqrt{5} - \frac{3}{2}\right)mga\,.$$

Aleš musí cihlu třicetkrát zvednout na hranu, přičemž přesune těžiště z $a/2$ do $a\sqrt{2}/2$, takže jeho celková práce je

$$W_\mathrm{A} = 30\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)mga\,.$$

Rozdíl práce Karla a Aleše činí

$$W_\mathrm{K} - W_\mathrm{A} = \left(10\sqrt{5} - 15\sqrt{2}\right)mga \doteq 0{,}56\,\mathrm{J}\,.$$

Karel vykonal o 0,56 J větší práci než Aleš.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.11 ... střelená

Náry nemá rád nepříjemná překvapení. Jak daleko od ústí vzduchovky by měl stát, aby slyšel výstřel přesně sekundu před tím, než by jej trefila diabolka. Rychlost zvuku je $334\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, úsťová rychlost diabolky je $152\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, elevační úhel výstřelu je 10°. Odporové síly zanedbáme. Pojem slyšel považujeme za ekvivalentní s doražením zvukové vlny k Nárymu. Čas pohybu diabolky uvnitř vzduchovky je také zanedbatelný. Uveďte s přesností na metry. *Kiki by střílela.*

X-ová složka dráhy uražená diabolkou bude stejná jako dráha zvuku. Se znalostí časového posunu zvuku o jednu sekundu lze tuto rovnost zapsat jako

$$v_0 t \cos\alpha = v(t - 1)\,,$$

kde v_0 je počáteční rychlost diabolky, t je doba, za kterou diabolka dorazí k Nárymu, α je elevační úhel a v je rychlost zvuku. Čas t si pak lze vyjádřit jako

$$t = \frac{v}{v - v_0\cos\alpha}$$

a dosadit do vztahu pro x-ovou složku dráhy diabolky

$$x = v_0 \frac{v}{v - v_0 \cos \alpha} \cos \alpha \,.$$

Po dosazení číselných hodnot získáme hodnotu $x \doteq 271\,\mathrm{m}$. Náry by tedy teoreticky měl stát asi 271 m od ústí vzduchovky.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha FoL.12 ... z Prahy do Brna

Jedete z Prahy do Brna po dálnici D1 rychlostí $v = 150\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Její délka na této trase je $d = 196\,\mathrm{km}$. Kolikrát během vaší cesty (ve vašem směru) potkáte autobus RegioJet, který z Prahy vyjíždí každou půlhodinu rychlostí $v_\mathrm{a} = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, pokud vyrážíte vy i autobus (ten do počtu autobusů, které potkáte, nepočítejte; pokud byste potkali autobus při vjezdu do Brna, ten počítejte) ve stejný okamžik? Předpokládejte plynulý provoz a žádné uzavírky.

Napadlo Dominiku při cestě z FYKOSího soustředění.

Řekněme, že první autobus dohoníte ve vzdálenosti s od Prahy. Ve chvíli, kdy vyrážíte, je autobus už

$$s(t_0) = v_\mathrm{a} t_0$$

daleko, kde $t_0 = 0{,}5\,\mathrm{h}$. Než se potkáte, autobus ujede trasu délky s_a. Zřejmě musí platit

$$s(t_0) + s_\mathrm{a} = s \,.$$

Také čas, který vám bude trvat dráha s a autobusu délka s_a, musí být stejný:

$$\frac{s_\mathrm{a}}{v_\mathrm{a}} = \frac{s}{v} \,.$$

Z uvedených vztahů lze snadno vyjádřit dráhu, kterou ujedete, než poprvé potkáte autobus

$$s = \frac{v_\mathrm{a} v}{v - v_\mathrm{a}} t_0 \,.$$

Jakmile dohoníte autobus, vaše situace je vzhledem k následujícímu autobusu stejná, tudíž stačí vydělit délku dálnice dráhou s a dostaneme počet autobusů, které po cestě potkáte:

$$\left\lfloor \frac{d(v - v_\mathrm{a})}{v_\mathrm{a} v t_0} \right\rfloor \,.$$

Po dosazení hodnot ze zadání vyjde 2.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha FoL.13 ... a Slunce v Hadonoši nám říká, že...

Jakou maximální silou může působit Jupiter na nějakého Fykosáka na Zemi? Fykosák má hmotnost $m_\mathrm{F} = 85{,}6\,\mathrm{kg}$. Ostatní údaje si nalezněte. Uvažujte, že Jupiter i Země se pohybují kolem Slunce po kružnicích s poloměrem rovným délce jejich udávaných hlavních poloos a obě dráhy jsou pro jednoduchost v jedné rovině.

Karel slyšel, že je tohle dobrý argument pro slabě věřící astrology.

Nalezneme si délky hlavních poloos drah Země $a_\mathrm{Z} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ a Jupiteru $a_\mathrm{J} = 7{,}78 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Největší a nejmenší vzdálenost mezi planetami bude právě v okamžiku, kdy jsou obě planety a Slunce v jedné přímce. Protože nás zajímá maximální síla mezi Fykosákem a Jupiterem, vezmeme minimální vzdálenost mezi planetami. Vzhledem ke vzdálenostem planet můžeme zanedbat přesnou polohu Fykosáka na Zemi a minimální vzdálenost Fykosák – Jupiter bude jednoduše $r_\mathrm{min} = a_\mathrm{J} - a_\mathrm{Z}$. Síla mezi nimi bude

$$F_\mathrm{g} = G\frac{m_\mathrm{F} m_\mathrm{J}}{r_\mathrm{min}^2}\,,$$

kde $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}kg^{-2}{\cdot}m^2}$ je gravitační konstanta a $m_\mathrm{J} = 1{,}90 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost Jupiteru. Když dosadíme do vzorce, získáváme maximální sílu $F \doteq 2{,}75 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}$. Tato síla je opravdu malá.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FoL.14 ... odražená od nuly

V rovině xy máme dokonale odrazivé zrcadlo reprezentované křivkou $x^2 + y^2 = 1$, $y < 0$. Po přímce $x = \sqrt{3}/2$ vyšleme do duté strany zrcadla světelný paprsek. Kolikrát se paprsek na zrcadle odrazí, než vyletí zpět do poloroviny $y > 0$? *Mirek byl líný zatáčet.*

Úhel mezi paprskem a dotyčnicí k půlkružnici v bodě dopadu je jednoduše

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ\,,$$

jelikož je kružnice jednotková. Dále víme, že úhel dopadu je roven úhlu odrazu (zde pracujeme s doplňkem do 90°) a že středový úhel půlkružnice je 180°. Jelikož paprsek dopadá rovnoběžně s osou y, je středový úhel příslušný tětivě, která spojuje dva body odrazu, roven 2α. Pro počet odrazů n potom můžeme zapsat nerovnici

$$\alpha + 2(n-1)\alpha < 180^\circ\,,$$

kde levá strana vyjadřuje úhel, o který se stočil směr paprsku (nebo taky úhel, „pod kterým vidíme“ ze středu půlkružnice n-tý bod odrazu paprsku), a hledat největší přirozené číslo n, které nerovnici splňuje. Po úpravě

$$n < \frac{1}{2}\left(\frac{180^\circ}{\alpha} + 1\right) = \frac{7}{2}\,,$$

a tedy hledaný počet odrazů je $n = 3$. Tento výsledek lze nahlédnout téměř okamžitě, když si uvědomíme, že tětivy tvořené paprskem představují strany pravidelného šestiúhelníku, tedy paprsek se po třech odrazech otočí.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.15 ... Eliášova koule

Jaký může být nejmenší poloměr r vodivé koule s nábojem $Q = 1\,\mathrm{C}$, aby ve vzduchu nesršela? Maximální intenzita pole, při které nevznikne sršení ve vzduchu je $E_{\mathrm{max}} = 25\,\mathrm{kV{\cdot}cm^{-1}}$.

Erik má rád jednoduché úlohy.

Pole v okolí nabité koule je stejné jako v okolí bodového náboje. Proto pro intenzitu elektrického pole na povrchu koule můžeme psát

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} < E_{\mathrm{max}}\,.$$

Odtud vyjádříme poloměr

$$r > \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{E_{\mathrm{max}}}} \doteq 60{,}0\,\mathrm{m}\,.$$

Poloměr koule musí být alespoň $60\,\mathrm{m}$.

Erik Hendrych
`erik@fykos.cz`

Úloha FoL.16 ... pod tlakem

Železnou tyč délky $l = 1\,\mathrm{m}$ umístíme do hydraulického lisu. Sevření konců tyče vyvolává určité malé napětí σ_0. Tyč má teplotní koeficient délkové roztažnosti $\alpha = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$ a modul pružnosti v tlaku $E = 200\,\mathrm{GPa}$. Upevněnou tyč zahřejeme o $\Delta T = 1\,\mathrm{K}$. O kolik se zvýší tlak působící na tyč, jestliže se ramena lisu nepohnou a nejsou tepelně vodivá?

Mirek sledoval hydraulický lis.

Kdyby tyč nebyla upevněna, došlo by zahřátím k jejímu prodloužení podle vzorce

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T\,,$$

kde ε je relativní prodloužení. Jelikož se tyč v lisu nemůže prodloužit, musí být právě o toto ε stlačena rameny lisu. Počáteční předpětí je irelevantní, dokud jsme stále v lineární oblasti závislosti deformace na napětí (což je implikováno tím, že počáteční napětí σ_0 je malé). Hookeův zákon říká, že

$$\Delta\sigma = \varepsilon E = \alpha \Delta T E \doteq 2{,}2 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}\,.$$

Tlak v tyči vzroste o $\Delta\sigma = 2{,}2\,\mathrm{MPa}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.17 ... dlouhý pád

Polystyrenovou kuličku o poloměru $r = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ *a hustotě* $\varrho = 0{,}06\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ *mrštíme svisle dolů do větrací šachty, kterou proudí horký, suchý vzduch o hustotě* $\varrho_\mathrm{a} = 1{,}1\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *rychlostí* $v_0 = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *směrem vzhůru. Určete velikost terminální rychlosti kuličky vůči šachtě, jestliže odporový koeficient kuličky je* $C = 0{,}50$ *a tíhové zrychlení je* $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Mirek nemohl během zálohování pracovat, tak vymýšlel úlohy.

Z rovnosti tíhové a odporové síly

$$mg = \frac{1}{2} C \varrho_\mathrm{a} S v^2$$

pro kuličku o hmotnosti $m = (4/3)\varrho S r$ určíme terminální rychlost vůči nehybnému vzduchu

$$v = \sqrt{\frac{8gr\varrho}{3C\varrho_\mathrm{a}}} \doteq 5{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Toto je terminální rychlost kuličky vůči vzduchu, proto se vůči šachtě bude pohybovat rychlostí $v' = |v - v_0| = 4{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ směrem vzhůru (dokud z ní nevyletí).

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.18 ... mikrorotace

Molární hmotnost vody je $M = 18\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. *Její molekuly mají určitou rotační energii, která má charakteristickou škálu* $\varepsilon = 650\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}}$. *Lineární rozměr odpovídající jedné molekule (její průměr) je* $l = 310\,\mathrm{pm}$. *Určete pomocí rozměrové analýzy charakteristickou časovou škálu rotace molekuly. Odpovědí je dekadický logaritmus získaného výsledku v sekundách.*

Mirek nechápal, proč má takové úlohy řešit v rámci magisterského studia.

Ze zadané energie, rozměrové škály a hmotnosti molekuly zkonstruujeme pomocí rozměrové analýzy vztah

$$t = l\sqrt{\frac{M}{\varepsilon}}\,.$$

Prostým dosazením zadaných hodnot po převodu do základních jednotek SI dostaneme číselně

$$t \doteq 1{,}6 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{s} = 1{,}6\,\mathrm{ps}\,.$$

Charakteristická časová škála rotace molekuly je tedy zhruba pikosekunda.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.19 ... dokonale vyvážená

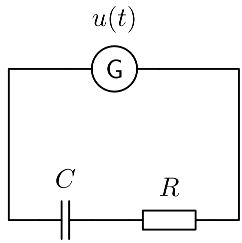
Mějme tenký disk z homogenního materiálu o poloměru r, *podepřený ve středu. Na začátku byla na okraji disku (tedy ve vzdálenosti* r *od jeho středu) naproti sobě položena dvě bodová závaží o hmotnosti* m. *Soustava tedy byla v rovnováze. Jedno z těchto závaží chceme nahradit dvěma závažíčky o hmotnostech* $3m/5$ *a* $4m/5$ *tak, aby obě závažíčka byla umístěna na okraji*

disku a soustava byla stále v rovnováze. Jak daleko, v násobcích r, jsou od sebe tato dvě závažíčka?
Meggy se nudila při přednášce z lingebry.

Závaží o hmotnosti $3m/5$ umístěné na okraji disku má stejný efekt jako závaží o hmotnosti m umístěné ve vzdálenosti $3r/5$ od středu. Vektor od středu k tomuto závaží nazvěme $\boldsymbol{r}_1$. Stejně tak závaží o hmotnosti $4m/5$ na okraji má stejný efekt jako závaží o hmotnosti m ve $4/5$ poloměru, vektor nazvěme $\boldsymbol{r}_2$. Tato dvě závaží mají spolu stejný efekt jako jediné závaží o hmotnosti m umístěné v součtu vektorů $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$. Tedy tyto dva vektory se musí sečíst na vektor o délce r. To znamená, že máme trojúhelník tvořený délkami $3r/5$, $4r/5$ a r, který je podle Pythagorovy věty pravoúhlý. Vektory $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ proto svírají pravý úhel a původní závažíčka jsou umístěna na okraji, tedy podle Pythagorovy věty jsou od sebe vzdálena $\sqrt{2}\,r$.

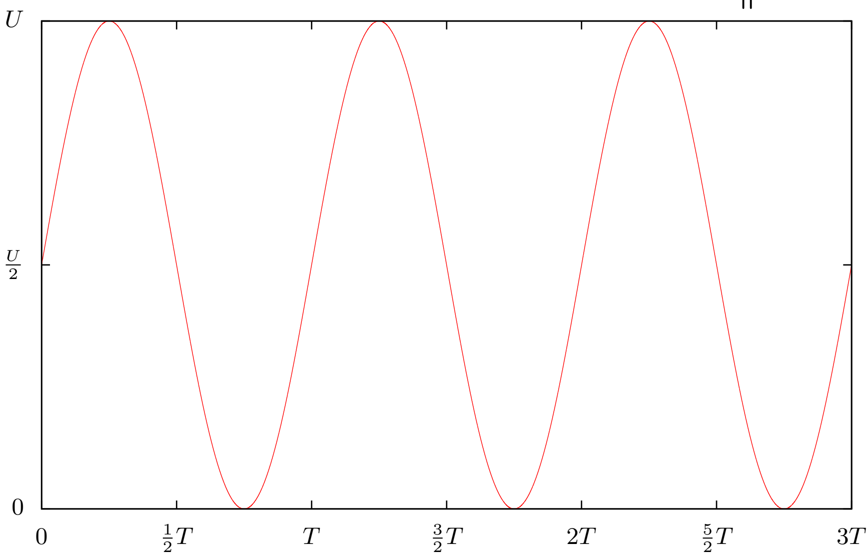
Markéta Calábková
`calabkovam@fykos.cz`

Úloha FoL.20 ... sinusovka



Do sériového RC obvodu připojíme tónový generátor generující sinusový průběh napětí $u(t)$. Rezistor má odpor $R = 200\,\Omega$, kondenzátor má kapacitu $C = 50\,\mu\mathrm{F}$, maximální napětí na zdroji má velikost $U = 5\,\mathrm{V}$. Jaký je střední náboj na kondenzátoru?
Kuba zjednodušil svůj první obvod.

Generátor lze nahradit sériovým zapojením zdroje stejnosměrného



Obr. 1: Průběh napětí.

napětí o velikosti

$$U_1 = U/2$$

a zdrojem střídavého napětí s průběhem

$$U_2(t) = \frac{U}{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Všechny prvky obvodu jsou lineární, proto jej lze brát jako superpozici dvou obvodů, přičemž každý obsahuje pouze jeden z těchto zdrojů. Ve stejnosměrném obvodu je náboj na kondenzátoru konstatní a má velikost

$$Q_1(t) = CU_1 = \frac{CU}{2}.$$

Ve střídavém obvodu se náboj mění harmonicky (s fázovým posunem oproti napětí U_2) a jeho střední hodnota je tedy nulová.

Celkový střední náboj je součtem středních nábojů v těchto dvou obvodech. Dostáváme tedy řešení

$$\langle Q\rangle = Q_1 = \frac{CU}{2} = 125\,\mu\mathrm{C}.$$

Na kondenzátoru je střední náboj $125\,\mu\mathrm{C}$.

Jakub Dolejší
krasnykuba@fykos.cz

Úloha FoL.21 ... řetězová reakce

Seřadili jsme za sebe velké množství kuliček o poloměru $r = 1\,\mathrm{cm}$ s rozestupy $d = 5\,\mathrm{cm}$ mezi jejich středy. Každá z kuliček má hmotnost $m = 20\,\mathrm{g}$ a rameno valivého odporu $\xi = 0{,}6\,\mathrm{mm}$. První kuličce udělíme počáteční rychlost $v = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ tak, že začne docházet k řetězovým centrálním srážkám. Kolikátá kulička v řadě bude tou poslední, která se pohne? Všechny srážky jsou dokonale pružné, tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Kuličky neprokluzují.

Mirek šel po Václaváku.

Jak zadání říká, srážky jsou dokonale pružné, tedy probíhají beze ztrát energie. Kuličky jsou stejně hmotné. To znamená, že když první koule narazí do druhé, dojde k zastavení první z nich a druhá se dá do pohybu okamžitou rychlostí první koule při srážce. Kuličky jsou dokonce zcela identické, proto si při každém nárazu můžeme myslet, že došlo k okamžitému posunu narážející kuličky o $2r$. První kulička má celkovou kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

po dosazení $\omega = v/r$, $J = 2mr^2/5$ dostaneme

$$E_\mathrm{k} = \frac{7}{10}mv^2.$$

Kulička se zastaví, když na ní vykoná valivý odpor mechanickou práci rovnou počáteční kinetické energii. Jelikož je odporová síla konstantní, snadno obdržíme vztah

$$mg\frac{\xi}{r}s = \frac{7}{10}mv^2$$

a z něj

$$s = \frac{7v^2 r}{10\xi g}\,,$$

kde s je dráha uražená první kuličkou bez přítomnosti ostatních kuliček. Po každých $d - 2r$ dojde ke srážce, celkem tedy nastane

$$\left\lfloor \frac{7v^2 r}{10(d-2r)\xi g} \right\rfloor = 39$$

srážek. Protože po n-té srážce se pohne $(n+1)$-tá koule, odpověď je tedy 40.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.22 ... žabičky žabičky

Dvě shodné nabité částice s hmotnostmi $m = 1\,\mathrm{g}$ a náboji $q = 1\,\mathrm{\mu C}$ umístíme do výšky $h = 2\,\mathrm{m}$ nad zemí. Poté je uvolníme a změříme, že při dopadu má jedna z kuliček rychlost $v = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. O kolik se snížila elektrostatická potenciální energie od začátku pohybu do okamžiku dopadu? Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Mirek vzpomínal na pošlapané nohy z dětství.*

Na částice působí jednak k zemi kolmá tíhová síla, jednak vodorovná elektrostatická síla – vodorovná proto, že jsou částice shodné a nemůže se proto stát, že by jedna padala rychleji než druhá. Abychom získali vodorovnou rychlost částice při dopadu, musíme určit kolmou složku rychlosti. Kolmá složka je jednoduše

$$v_\perp = \sqrt{2hg}\,,$$

takže vodorovná složka je

$$v_\parallel = \sqrt{v^2 - v_\perp^2}$$

a vystupuje v zákonu zachování energie pro celý systém

$$\Delta E_\mathrm{e} = \Delta E_{\mathrm{k}\parallel} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_\parallel^2 = m\left(v^2 - 2hg\right);$$

tento vztah bylo možné nahlédnout ze zákona zachování energie pro kolmé složky. Číselně vyjde změna potenciální energie $\Delta E_\mathrm{e} = 0{,}061\,\mathrm{J}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.23 ... visí – visí

V laboratoři visí na nehmotném provázku polystyrenová koule o hmotnosti $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ a hustotě $\varrho = 1\,020\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Měrná tepelná kapacita polystyrenu je $c = 1\,400\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, koeficient délkové teplotní roztažnosti je $\alpha = 7 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$. Na jiný provázek pověsíme další kouli ze stejného materiálu o hmotnosti $m_2 = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Každé kouli dodáme teplo $Q = 5\,\mathrm{kJ}$. Tím se zvýší celková energie první koule o E_1 a celková energie druhé koule o E_2. Nalezněte rozdíl $E_2 - E_1$. Tíhové zrychlení v homogenním gravitačním poli je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Mirek vzpomínal na klasické úlohy.

Koule se nachází v tíhovém poli Země. Poté, co jí dodáme teplo Q, se její teplota zvýší o $\Delta T = Q/(mc)$ a její poloměr se zvětší o

$$\Delta r = r_0 \alpha \Delta T\,.$$

Původní poloměr určíme z hustoty a hmotnosti jako

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho}}\,.$$

Změna poloměru nám zároveň říká, o kolik pokleslo těžiště koule (bylo vzdáleno r_0 od konce provázku, nyní je vzdáleno $r = r_0 + \Delta r$). Potenciální energie koule se snížila o

$$mg\Delta r = mg\alpha\Delta T \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho}} = \frac{\alpha Q g}{c} \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho}}\,.$$

Jelikož oběma koulím bylo dodáno stejné teplo, rozdíl celkových změn jejich energií je

$$E_2 - E_1 = m_2 g \Delta r_2 - m_1 g \Delta r_1 = \frac{\alpha Q g}{c}\left(\sqrt[3]{\frac{3m_2}{4\pi\varrho}} - \sqrt[3]{\frac{3m_1}{4\pi\varrho}}\right) \doteq 3{,}1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}\,.$$

Ještě doplňme, že kdyby koule stály na tepelně nevodivé podložce, měl by výsledek opačné znaménko.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.24 ... excentrický souputník

Známe-li poměr rychlostí planety kolem její hvězdy v pericentru (bodu nejbližším hvězdě) a apocentru (bodu nejvzdálenějším hvězdě) na její eliptické oběžné dráze $v_\mathrm{p}/v_\mathrm{a} = K = \sqrt{2}$, jakou má tato dráha numerickou (relativní) excentricitu ε? *Karel má rád úlohy na 2. Keplerův zákon.*

Vyjdeme z druhého Keplerova zákona, který nám říká, že plošná rychlost je konstantní, tedy

$$w = \frac{v_\mathrm{a} a_\mathrm{a}}{2} = \frac{v_\mathrm{p} a_\mathrm{p}}{2}\,,$$

kde a_a je vzdálenost planety od Slunce v apocentru a a_p je vzdálenost v pericentru. Tyto vzdálenosti si můžeme vyjádřit pomocí délky hlavní poloosy a excentricity jako $a_\mathrm{a} = a(1+\varepsilon)$ a $a_\mathrm{p} = a(1-\varepsilon)$. Když tato vyjádření dosadíme do rovnosti pro plošnou rychlost a vyjádříme poměr rychlostí, dostáváme

$$v_\mathrm{a} a(1+\varepsilon) = v_\mathrm{p} a(1-\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}} = K = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,.$$

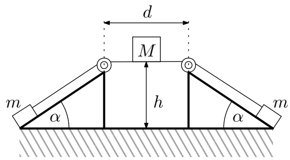
Nyní vidíme, že máme relativně jednoduchou rovnici, kde vystupuje pouze K a hledané ε, které už snadno vyjádříme

$$\varepsilon = \frac{K-1}{K+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2} \doteq 0{,}172\,.$$

Relativní excentricita dráhy planety je tedy 0,172.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FoL.25 ... všechny kvádry nahoru



Na obrázku vidíte velký kvádr o hmotnosti $M = 1\,\mathrm{kg}$, který svou tíhovou silou táhne přes kladky dva malé kvádry o hmotnostech $m = M/4$ po nakloněné rovině s úhlem sklonu $\alpha = 35^\circ$. Dříve než malé kvádry dojedou až ke kladkám, velký kvádr dopadne nepružně na zem. Do jaké maximální výšky se malé kvádry dostanou? Známe rozměry z obrázku $d = 0{,}8\,\mathrm{m}$, $h = 0{,}6\,\mathrm{m}$, rozměry kvádrů a kladek jsou oproti nim zanedbatelné. Dynamické i statické tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou je $f = 0{,}5$. Hledanou výšku měříme vůči počáteční poloze kvádrů, tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. V kladkách není tření.

Mirek konstruoval důmyslné mechanismy.

Délka lanka mezi zátěží M a kladkou je na počátku $d/2$. Poté, co závaží klesne až k zemi, bude délka tohoto úseku rovna

$$\sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}\,.$$

Kvádr na nakloněné rovině bude tedy ve směru sklonu posunut o

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{d}{2}\,.$$

Potenciální energie velkého kvádru poklesla o Mgh, zatímco potenciální energie malého kvádru vzrostla o $mgl \sin\alpha$. Energetická bilance soustavy je

$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + 2\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgl\sin\alpha + W_\mathrm{t}\right)\,,$$

kde v je rychlost malého kvádru ve chvíli dopadu velkého kvádru, V je rychlost velkého kvádru těsně před dopadem a W_t je energie disipovaná třecí sílou při pohybu jednoho malého kvádru, kterou určíme jako

$$W_\mathrm{t} = mgfl\cos\alpha\,.$$

Malý kvádr se v první fázi pohybu posouvá vždy stejnou rychlostí, s jakou se prodlužuje délka lana mezi velkým kvádrem a kladkou. Z toho nám plyne vztah mezi rychlostí velkého a malého kvádru před dopadem

$$v = V\frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}\,.$$

Tak z energetické bilance dokážeme určit rychlost malého kvádru

$$v = \sqrt{\frac{Mgh - 2mgl\sin\alpha - 2W_\mathrm{t}}{\frac{1}{2}\frac{Mh^2}{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + m}}\,.$$

S touto rychlostí se malý kvádr pohybuje proti oběma zrychlením třecímu i tíhovému: $a = fg\cos\alpha + g\sin\alpha$. Dráha uražená při rovnoměrně zpomaleném pohybu až do zastavení je $v^2/(2a)$, spolu s již uraženou dráhou l tedy dostaneme pro vertikální posun jednoho z malých kvádrů hodnotu

$$s = \left(l + \frac{Mh/2 - ml\sin\alpha - mfl\cos\alpha}{\left(m + \frac{Mh^2}{2\left(h^2 + (d/2)^2\right)} \right)(f\cos\alpha + \sin\alpha)} \right)\sin\alpha\,.$$

Číselně $s \doteq 0{,}40\,\mathrm{m}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.26 ... ladíme

Uprostřed pole je Pepík s ladičkou, která vydává zvuk o frekvenci $f_1 = 440\,\mathrm{Hz}$. Vy jedete autem od Pepíka pryč rychlostí $v = 70\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jakou frekvenci f zaznamenáte v autě? Rychlost zvuku ve vzduchu $v_\mathrm{s} = 330\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Olda řekl.*

Zadání příkladu přímo navádí na Dopplerův jev. Ten popisuje změnu frekvence vlnění přijímaného signálu, pokud se pohybuje zdroj nebo detektor. Když se detektor, v našem případě my v autě, pohybuje pryč od vysílače, zaznamená nižší frekvenci než je ve skutečnosti vysílána. Její velikost se určí podle vzorce

$$f = f_1 \frac{v_\mathrm{s} - v}{v_\mathrm{s}}\,,$$

kde v_s je rychlost zvuku. Po dosazení vyjde $f = 414\,\mathrm{Hz}$.

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`

Úloha FoL.27 ... únosná

Letadlo prezidenta USA má dolet přibližně 12 600 km. Jednou jej krátce po startu, s prezidentem na palubě, unesli teroristé a ztratili se z radarů. Okamžitě se rozjelo pátrání po letounu na vodě i na souši. Jakou plochu (v km^2) budou muset prohledat, jestliže teroristé nemají kde natankovat? *Mikuláš byl unešen letadlem.*

Prvně si musíme uvědomit, že při takovém měřítku už bude hrát roli zakřivení Země, a proto nelze použít vzorec pro obsah kruhu v euklidovské geometrii. S dostatečnou přesností lze ovšem použít aproximaci Země koulí. Přestože vzorce pro povrch kulového vrchlíku jsou snadno dohledatelné, zkusíme použít elementární integraci. Označme R poloměr Země, D dolet letadla a zaveďme sférické souřadnice se středem ve středu Země a osou z procházející místem startu letadla. Pak lze plochu určit pomocí plošného integrálu $\int \mathrm{d}S$. V našem případě platí $\mathrm{d}S = R^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$, a proto můžeme psát

$$S = \int \mathrm{d}S = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{D/R} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = $$
$$= R^2 \int_0^{2\pi} 1 - \cos\frac{D}{R}\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2 \left(1 - \cos\frac{D}{R}\right)\,.$$

Po dosazení získáme správnou výslednou plochu přibližně $3{,}6 \cdot 10^8\,\mathrm{km}^2$. Kdybychom dosazovali do vzorce πD^2, získali bychom asi $5 \cdot 10^8\,\mathrm{km}^2$, což už je dost odlišný výsledek.

Mikuláš Matoušek
`mikulas@fykos.cz`

Úloha FoL.28 ... rozprsk

Na kolik menších kapiček by se teoreticky mohla rozprsknout jedna kapka vody, pokud bychom ji upustili z výšky $h = 50\,\mathrm{cm}$. Uvažujte, že kapky jsou všechny kulové, poloměr původní kapky je $r = 1\,\mathrm{cm}$ (ve výšce h je její těžiště) a kapka se má rozpadnout na stejně velké kapičky. Kapková voda má povrchové napětí $\sigma = 73\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$ a hustotu $\varrho = 1{,}00\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Jde nám o maximální odhad, který uvažuje pouze energetickou bilanci na počátku a na konci.

Karel se díval na kapičku, jak padá... až dopadne.

Dle zadání se bude velká kapka rozdělovat na n menších kapek. Poloměr každé z těchto kapek, za předpokladu, že se zachovává objem vody V, bude

$$r_n = r\sqrt[3]{\frac{1}{n}}\,.$$

Potenciální polohová energie, kterou je možné přeměnit na povrchovou energii je dána vzorcem

$$\Delta E = mgh = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g h\,,$$

kde g je tíhové zrychlení a $m = \varrho V$ je hmotnost kapky. Zde jsme použili předpoklad $r \ll h$. Rozdíl povrchové energie mezi situací, kdy máme jenom jednu kapku, a situací, kdy je naše kapka rozpadlá na mnoho malých kapiček, je

$$\Delta E = \sigma \Delta S = \sigma\left(nS_n - S_1\right) = \sigma\left(4\pi r_n^2 n - 4\pi r^2\right) = 4\pi\sigma r^2\left(\sqrt[3]{n} - 1\right)\,.$$

Nyní stačí dát tyto dvě vyjádření pro energii do rovnosti

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g h = 4\pi\sigma r^2\left(\sqrt[3]{n} - 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad n = \left(\frac{\varrho g h r}{3\sigma} + 1\right)^3 \doteq 1{,}14 \cdot 10^7\,.$$

Kapička se může rozprsknout maximálně na 11 milionů malých kapiček. Jde ale opravdu o horní odhad zanedbávající i to, že musíme při tvoření malých kapiček projít přes jiný než kulový tvar kapiček. Také jsme zanedbali to, že se nikdy nepřemění 100 % potenciální energie polohové do povrchové energie kapiček.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FoL.29 ... tlumený rozkmit

Máme hmotný bod, který vykonává tlumené kmitání v ose y, které můžeme popsat rovnicí $y = y_\mathrm{m} \mathrm{e}^{-bt} \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde y_m je maximální výchylka, $b = 0{,}05\,\mathrm{s}^{-1}$ je koeficient tlumení, $\omega = 200\,\mathrm{Hz}$ je úhlová rychlost a φ_0 je počáteční úhlová výchylka. V jakou chvíli se maximální výchylka zmenší pod $y_\mathrm{m}/2$?

Karel se díval na příliš tlumenou pružinku.

Je důležité si uvědomit, že maximální výchylka je dána členem $y_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-bt}$ a že násobení goniometrickou funkcí nám dává kmitání, nicméně maximální možnou výchylku neovlivní. Proto řešíme pouze rovnici

$$y_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-bt} = \frac{y_\mathrm{m}}{2}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{-bt} = \frac{1}{2}\,, \qquad \Rightarrow \qquad t = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{b} = \frac{\ln 2}{b} \doteq 13{,}9\,\mathrm{s}\,.$$

Maximální výchylka hmotného bodu poklesne na polovinu po 13,9 s.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.30 ... nestrkej tam prsty

Velký stropní větrák můžeme hrubě aproximovat jako disk o poloměru $r = 10\,\mathrm{cm}$ a hmotnosti $M = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, na nějž jsou připevněny tři tyče směřující od středu disku, jejichž délka je $l = 40\,\mathrm{cm}$ a hmotnost $m = 0{,}2\,\mathrm{kg}$. Větrák rotuje s frekvencí $f = 1\,\mathrm{Hz}$. Jakou práci musíme vynaložit na jeho zastavení? Veškeré části větráku jsou homogenní, tření neuvažujte.

Mirek šimral lopatky.

Postup při řešení je poměrně přímočarý: spočteme rotační kinetickou energii větráku a ta bude rovna práci, kterou je potřeba vynaložit k jeho zastavení. Potřebujeme tedy znát momenty setrvačnosti jednotlivých částí. Moment setrvačnosti disku rotujícího kolem středu je

$$I_0 = \frac{1}{2}Mr^2\,.$$

Moment setrvačnosti tyče, která rotuje kolem středu disku, je

$$I_1 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}+r\right)^2 = m\left(\frac{1}{3}l^2 + lr + r^2\right)\,.$$

Celkový moment setrvačnosti větráku (tři tyče plus disk) je

$$I = I_0 + 3I_1 = \frac{1}{2}Mr^2 + m\left(l^2 + 3lr + 3r^2\right)\,.$$

Kinetickou energii potom spočteme jako

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I(2\pi f)^2 = \left(Mr^2 + 2m(l^2 + 3lr + 3r^2)\right)\pi^2 f^2 \doteq 1{,}27\,\mathrm{J}\,.$$

K zastavení větráku je tedy potřeba vynaložit práci 1,27 J.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.31 ... temná planeta

Jaký poloměr by musela mít koule, která by měla hustotu podobnou Zemi $\varrho = 5{,}50\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$, ale úniková rychlost z jejího povrchu by byla rovna rychlosti světla? Zajímá nás první přiblížení – tedy výpočet bez relativistických efektů. Uvažujte, že hustota je konstantní a planeta je tedy homogenní. ***Výsledek udejte v násobcích poloměru Země*** *$R_\mathrm{Z} = 6\,371\,\mathrm{km}$.*

Karel má rád povídání o relativistických jevech, ale nerad počítá relativitu.

Únikovou rychlost z planety o hmotnosti M a poloměru R si můžeme najít v tabulkách či určit z rovnosti dostředivé a gravitační síly. Je to

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\,,$$

kde $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}kg^{-2}{\cdot}m^2}$ je gravitační konstanta. Hmotnost M si můžeme vyjádřit jako $M = \varrho V$, kde V je objem planety. V našem případě je to $V = 4\pi R^3/3$. Dosadíme do vzorce pro únikovou rychlost a místo únikové rychlosti budeme počítat rychlost světla $v = c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

$$c = \sqrt{\frac{8\pi G R^3 \varrho}{3R}}\,, \qquad \Rightarrow \qquad R = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\varrho}}\, c \doteq 1{,}7 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \doteq 27\,000\, R_\mathrm{Z}\,.$$

Naše mystická hypotetická planeta by tedy musela mít poloměr 27 000krát větší než Země.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.32 ... křus

Měsíc je přibližně homogenní koule o hmotnosti $M = 7{,}3 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ a poloměru $R = 1\,700\,\mathrm{km}$, která rotuje s periodou $T = 27\,\mathrm{d}$. Na rovník Měsíce dopadne megameteorit o hmotnosti $m = M/1\,000$ proti směru rotace pod úhlem $\vartheta = 45^\circ$ směrem do měsíční půdy. Dopadová rychlost je $v = 10\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Jak dlouhý bude měsíční den po dopadu, pokud se trosky meteoritu rovnoměrně rozmístí po povrchu Měsíce? Meteorit i Měsíc jsou ze stejného materiálu. Neuvažujte gravitační ovlivňování těles před dopadem. Výsledek udejte jako kladné číslo v jednotkách dnů.

Mirek chtěl, aby Měsíc měl měsíc.

Meteorit, který má narazit do povrchu Měsíce pod úhlem $\vartheta = 45^\circ$, má moment hybnosti vůči středu Měsíce

$$L_\mathrm{m} = \eta M v R \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

kde jsme označili $\eta = 1/1\,000$. Jestliže jde o náraz proti směru rotace, bude se moment hybnosti meteoritu od původního momentu hybnosti Měsíce odečítat, tedy

$$L' = L - L_\mathrm{m}\,,$$

kde L' je nový moment hybnosti Měsíce a L je jeho původní moment. Moment setrvačnosti koule/Měsíce kolem středu je

$$I = \frac{2}{5} M R^2\,.$$

Po dopadu meteoritu platí

$$I' = \frac{2}{5}\left(M + \eta M\right)\left(R \sqrt[3]{1+\eta}\right)^2\,.$$

Jelikož moment hybnosti můžeme zapsat také jako $L = I\omega$, kde ω je úhlová rychlost rovná výrazu $2\pi/T$, bude pro novou úhlovou rychlost ω' platit

$$\omega' = \frac{I}{I'}\omega - \frac{L_\mathrm{m}}{I'}\,,$$

zapsáno v dobách rotace

$$T' = \frac{1}{\frac{I}{I'}\frac{1}{T} - \frac{L_\mathrm{m}}{2\pi I'}}\,.$$

Po úpravách a dosazení tedy dostaneme novou oběžnou dobu

$$T' = \frac{(1+\eta)^{5/3}}{\frac{1}{T} - \frac{5\eta}{4\pi}\frac{v}{R}\frac{\sqrt{2}}{2}} \doteq -9{,}5\,\mathrm{d}\,.$$

Nová oběžná doba je tedy 9,5 d, přičemž se Měsíc otáčí v opačném směru než dříve.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.33 ... ještě kousek

Na dvou protilehlých stěnách vzdálených $d = 1\,\mathrm{m}$ jsou přímo naproti sobě umístěny dva háčky. Na jednom háčku je náboj $q = 1\,\mu\mathrm{C}$. Na druhém háčku není žádný náboj, ale visí na něm nehmotný nevodivý provázek o délce $l = d$, na jehož dolním konci je umístěna kulička s hmotností $m = 2\,\mathrm{g}$ a nábojem $-q$. Nalezněte nejmenší úhel (v $^\circ$) mezi provázkem a stěnou, pro který bude kulička v klidu. *Mirek se natahoval pro sešit.*

Hledaný úhel označíme α, úhel mezi spojnicí kuličky s protějším háčkem a svislicí označíme β. Kulička dělí vzdálenost mezi stěnami na úseky $l\sin\alpha$ a $l(1-\sin\alpha)$. Vertikální vzdálenost kuličky od háčků je $l\cos\alpha$. Úhel β tedy dokážeme vyjádřit pomocí úhlu α jako

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Elektrostatickou sílu budeme psát ve tvaru $F_\mathrm{e} = a/r^2$, kde

$$a = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

a r je délka výše zmíněné spojnice. Aby byla kulička v rovnováze, musí výslednice sil $F_g = mg$ a F_e ukazovat ve směru provázku. Tuto geometrickou skutečnost dokážeme vyjádřit rovností

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_\mathrm{e}\sin\beta}{F_g - F_\mathrm{e}\cos\beta} = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\frac{mgr^2}{a\cos\beta} - 1}$$

Spočteme si z Pythagorovy věty

$$r = l\sqrt{2(1-\sin\alpha)}$$

a také

$$\cos\beta = \frac{l\cos\alpha}{r} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2(1-\sin\alpha)}}\,.$$

Dosazením za $\cos\beta$ a $\mathrm{tg}\,\beta$ do vyjádření $\mathrm{tg}\,\alpha$ dostaneme po několika úpravách a dosazení za r

$$1 - \mathrm{tg}\,\alpha\frac{mgl^2}{a}\big(2(1-\sin\alpha)\big)^{3/2} = 0\,.$$

Nejmenší kladný kořen tohoto výrazu je $\alpha \doteq 0{,}239 \doteq 13{,}7^\circ$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.34 ... řetězová reakce II

Seřadili jsme za sebe na ledovou plochu velké množství shodných ledových kvádříků se čtvercovou podstavou o hraně $a = 2\,\mathrm{cm}$ s rozestupy $d = 5\,\mathrm{cm}$ (měřeno od středů). Každý z kvádříků má hmotnost $m = 20\,\mathrm{g}$ a koeficient tření (dynamického i statického) je $f = 0{,}03$. Prvnímu kvádříku udělíme počáteční rychlost $v_0 = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ tak, že začne docházet k řetězovým centrálním srážkám. Kolikátý kvádřík v řadě bude tím posledním, který se pohne? Všechny srážky jsou dokonale nepružné, kvádříky se nepřeklápějí a jsou orientovány stěnami k sobě. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Mirek chodí po Václaváku celkem často.*

Na první kvádřík během pohybu působí třecí odpor, jeho zrychlení je tedy $a_0 = fg$ proti směru pohybu. Označíme-li vzdálenost mezi kvádříky $\delta = d - a$, poklesne rychlost na této dráze z v_0 na $\sqrt{v_0^2 - 2a_0\delta}$. Po dokonale nepružné srážce se zdvojnásobí hmotnost (kvádříky zůstanu při sobě) a podle zákona zachování hybnosti bude tedy pro rychlost po první srážce platit

$$v_1 = \frac{1}{2}\sqrt{v_0^2 - 2a_0\delta}\,.$$

Při dalších srážkách bude hmotnost stále narůstat, rychlost před a po n-té srážce se tedy vynásobí vždy koeficientem $n/(n+1)$. Spolu se vztahem pro pokles rychlosti mezi srážkami dostáváme pro rychlost po n-té srážce vztah

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sqrt{v_0^2 - 2a_0\delta\sum_{k=1}^{n}k^2} = \frac{1}{n+1}\sqrt{v_0^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)fg\delta}{3}}\,.$$

Největší přirozené n, pro které má tento výraz fyzikální smysl, je $n = 5$. Pořadové číslo posledního kvádříku, který se rozpohybuje, je tedy 6.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.35 ... Newtonovy kroužky

Olda se koukal na Newtonova skla. Spočítejte vzdálenost, kde se nachází od středu 2. minimum interferenčních kroužků. Když víme, že na kroužky dopadá světlo s vlnovou délkou $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ a index skla je $n_\mathrm{s} = 1{,}5$ a index vzduchu je $n_\mathrm{v} = 1$. Poloměr křivosti skla je $r = 20\,\mathrm{cm}$.
Olda se koukal na Newtonův kroužek

Fázový rozdíl interferujících paprsků vychází z cesty vzduchem od skla na podložku a zpět a z překmitnutí fáze o π při odrazu od opticky hustšího prostředí – celkově dostáváme

$$\delta\varphi = 2yn_v k_0 - \pi\,,$$

kde k_0 je vlnové číslo (platí $k_0 = 2\pi/\lambda$) a y výška kulatého skla nad podložkou.

Pro další výpočet musíme určit y v závislosti na vzdálenosti od prostředka kulatého skla. Z Pythagorovy věty dostáváme

$$x^2 + (y-r)^2 = r^2\,,$$
$$x^2 + y^2 - 2ry = 0\,.$$

V aproximaci $y \ll r$ můžeme zanedbat člen y^2. Pak máme vztah pro y

$$y = \frac{x^2}{2r} \,.$$

Po dosazení máme

$$\delta\varphi = k_0 n_\mathrm{v} \frac{x^2}{r} - \pi \,.$$

Interferenční minimum nastane, pokud fázový rozdíl interferujících paprsků je

$$\delta\varphi = 2m\pi - \pi \,,$$

kde m je číslo minima (minimum ve středu je nulté). Když dáme tyto rovnice dohromady, tak dostaneme podmínku pro výpočet minima

$$x = \sqrt{\frac{mr\lambda}{n_\mathrm{v}}} = \sqrt{2r\lambda} \doteq 4{,}47 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \,.$$

V řešení jsme předpokládali, že paprsky se při přechodu sklem lámou pouze zanedbatelně. Vidíme, že $x \ll r$, předpoklad je tedy oprávněný a také platí $y \ll r$.

Oldřich Holcner
`holcner@fykos.cz`

Úloha FoL.36 ... krátký obvod

V jednoduchém elektrickém obvodě máme dva prvky: zdroj konstantního napětí $U = 1\,\mathrm{V}$ s vnitřním odporem $R = 1\,\Omega$ a cívku. Cívka je z měděného drátu kruhového průřezu, její délka je $l = 30\,\mathrm{cm}$, vnitřní poloměr $r_1 = 1{,}90\,\mathrm{cm}$, vnější poloměr $r_2 = 2{,}05\,\mathrm{cm}$ a má $N = 200$ závitů. Jaký největší proud bude protékat obvodem po tom, co zdroj napětí zapneme? Teplota v místnosti je $20\,{}^\circ\mathrm{C}$, zanedbejte zahřívání drátu. *„Cievka je ako dievka: najprv napätie, potom prúd.“*

Aj keď má zdroj napätia vnútorný odpor, musíme zarátať aj odpor cievky. Ten vypočítame ako

$$R_\mathrm{L} = \varrho_\mathrm{Cu} \frac{4l_\mathrm{d}}{\pi(r_2 - r_1)^2} \,,$$

kde l_d je dĺžka drôtu cievky, $r_2 - r_1$ je priemer drôtu a $\varrho_\mathrm{Cu} = 1{,}68 \cdot 10^{-8}\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}$ je rezistivita medi pri danej teplote. Dĺžka drôtu určite nie je rovná l, navyše drôt na nej nie je navinutý presne do kruhu, ale trochu ohnutý. Dá sa na to pozrieť tak, že dĺžka drôtu pozdĺž osi je l a dĺžka „kolmo na os“ je $\pi(r_1 + r_2)N$, preto je

$$l_\mathrm{d} = \sqrt{l^2 + \left(\pi(r_1 + r_2)N\right)^2}$$

podľa Pytagorovej vety. (V tomto prípade je podstatný len druhý člen a $l_\mathrm{d} \approx \pi(r_1 + r_2)N$.)

Ďalej vieme, že ak cievkou prechádza konštantný prúd, tak sa v nej žiadne napätie neindukuje a cievka sa správa ako obyčajný drôt. Intuitívne dáva zmysel, že práve vtedy bude prúd maximálny, z čoho dostávame

$$I_\mathrm{max} = \frac{U}{R + R_\mathrm{L}} \approx \frac{U}{R + \varrho_\mathrm{Cu} \frac{4(r_1 + r_2)N}{(r_2 - r_1)^2}} \doteq 0{,}809\,\mathrm{A} \,.$$

Presný priebeh prúdu po skokovom zapnutí môžeme vypočítať z diferenciálnej rovnice $U = (R + R_\mathrm{L})I + L\dot{I}$, ktorej riešenie pre $I(0) = 0$ je v tvare $I = A(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})$. Dosadením dostaneme $\lambda = (R + R_\mathrm{L})/L$ a $A = U/(R + R_\mathrm{L})$. Prúd sa teda blíži k predtým vypočítanej hodnote I_max, ale nikdy ju nedosiahne (a teda ani nepresiahne).

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FoL.37 ... exoplaneta

Okolo vzdálené hvězdy hmotnosti $M = 1{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ *obíhá po kruhové dráze v rovině zorného paprsku planeta s poloměrem* $r_\mathrm{p} = 8{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$. *Byl pozorovaný přechod této planety před hvězdou, který od prvního poklesu jasnosti do doby, než se navrátila původní jasnost, trval* $T = 2{,}0\,\mathrm{hod}$ *a jasnost poklesla o maximálně* $p = 0{,}3\,\%$. *Určete poloměr dráhy planety.*

Filip čítal o novoobjavených exoplanétach.

Pozrime sa na hviezdu, ktorej polomer si označíme R, a planétu z vrchu. Keďže hviezda je veľmi ďaleko, lúče, ktoré smerujú k nám, sú takmer paralelné. Preto začne jasnosť klesať v momente, keď sa planéta dotkne spojnice zeme a okraju hviezdy, a vráti sa na pôvodnú hodnotu, keď sa planéta dotkne druhej spojnice zvonka. Keďže orbit bude vo vzdialenosti výrazne väčšej ako polomer hviezdy a ten bude výrazne väčší ako polomer planéty, bude vzdialenosť, ktorú planéta prejde, $Tv \approx 2R + 2r \approx 2R$. Planéta sa pritom pohybuje kruhovou rýchlosťou

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Vieme tiež, že planéta zablokuje časť hviezdy úmernú $p = r_p^2/R^2$. Takže

$$T\sqrt{\frac{GM}{r}} = 2\frac{r_p}{\sqrt{p}}$$

$$r = \frac{pT^2GM}{4r_p^2}\,,$$

z čoho $r \doteq 4{,}05 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$. Ak spočítame kruhovú rýchlosť v tejto vzdialosti, môžeme ľahko skontrolovať že naše zanedbanie bolo opodstatnené; čas ktorý planéte trvá prejsť vzdialenosť $2r$ je asi $0{,}39\,\mathrm{s}$ teda $0{,}005\,\%$ z času tranzitu.

Filip Ayazi
`filip@fykos.cz`

Úloha FoL.38 ... spavá nemoc

Králíček má předepsány léky na spaní. Pokud si vezme $1/3$ *tabletky, spí 5 hodin. Pokud si vezme* $2/3$ *tabletky, spí 9 hodin. Jednou králíčkovi hráblo a vzal si 100 tabletek. Kolik hodin pak spal, jestliže králíček spí právě tehdy, když koncentrace léku v krvi přesahuje určitou hodnotu. Předpokládejte, že rychlost odbourávání léku je přímo úměrná jeho koncentraci. Neuvažujte zbytkovou koncentraci léku z předchozích dní ani smrt králíčka.* *Mikuláš nemohl spát.*

Vyřešíme-li diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -\alpha c\,,$$

tak zjistíme, že koncentrace léku musí klesat exponenciálně podle vzorce $c = c_0 \exp(-\alpha t)$ s neznámou konstantou α. Tu určíme ze znalosti dob spánku králíčka. Označme c_1 koncentraci po spolknutí jedné tabletky a c_x koncentraci, při které se králíček probudí a dosaďme za t čas v hodinách (α tedy bude v h^{-1}). Víme tedy, že

$$\frac{1}{3}c_1\mathrm{e}^{-5\alpha} = c_x\,,$$
$$\frac{2}{3}c_1\mathrm{e}^{-9\alpha} = c_x\,.$$

Porovnáním a přechodem k exponentu dostaneme, že

$$\alpha = \frac{\ln 2}{4}\,\mathrm{h}^{-1}\,.$$

Porovnáním s exponenciálou neznámého času t (v hodinách) pak získáme rovnici

$$100\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{4}t} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-5\frac{\ln 2}{4}}\,,$$

jejímž řešením získáme neznámý čas

$$t = \frac{5\frac{\ln 2}{4} + \ln 300}{\frac{\ln 2}{4}}\,,$$

který je číselně roven přibližně 38 hodinám. To není tak moc, uvážíme-li, že si králíček vzal několikasetnásobek běžné dávky. V praxi se ovšem při zvyšujících se koncentracích jaterní enzymy „nasytí“ a rychlost eliminace přestane být závislá na koncentraci, která pak klesá spíše lineárně.

Mikuláš Matoušek
`mikulas@fykos.cz`

Úloha FoL.39 ... házet hrách na stěnu

Mirek seděl v práci na kancelářské židli s kolečky a zamyšleně koukal do zdi. Aby dělal něco užitečného, vzal si do ruky sáček s hrášky a házel je na stěnu. V sáčku je $n = 3\,600$ hrášků, každý váží $m_\mathrm{h} = 0{,}2\,\mathrm{g}$ a Mirek hází hrášky s frekvencí $f = 0{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$. Hrášek má při výhozu pouze vodorovnou složku rychlosti o velikosti $v_\mathrm{h} = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jakou rychlostí se bude Mirek pohybovat poté, co sáček zcela vyprázdní? Mirkova hmotnost spolu s židlí je $m_\mathrm{M} = 60\,\mathrm{kg}$, židle se pohybuje bez odporu. *Mirek se potřeboval pohnout z místa.*

Jedná se o stejný princip jako u zrychlování rakety, použijeme tedy stejný postup jako při odvozování Ciolkovského rovnice (vyhazování hrášků tedy budeme považovat za spojité ubývání hmotnosti). Nechť Mirek, židle a sáček dohromady váži v čase $m(t)$ v čase t a pohybuje se ve směru x, počáteční podmínky jsou $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $m(0) = m_\mathrm{M} + nm_\mathrm{h}$. Hybnost Mirka spolu s židlí a sáčkem se mění podle vztahu

$$\frac{\mathrm{d}(m\dot{x})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\dot{x} + m\ddot{x}\,.$$

Abychom pracovali s celkovou hybností systému, musíme ještě připočíst změnu hybnosti zahozených hrášků

$$-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_\mathrm{o}\,,$$

kde rychlost v_o je rychlost hrášku jak ji vidí nehybný pozorovatel, tedy $v_\mathrm{o} = \dot{x} - v_\mathrm{h}$ (všechny rychlosti bereme s kladným znaménkem). Změna celkové hybnosti je nulová, takže

$$0 = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\dot{x} + m\ddot{x} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_\mathrm{o}\,,$$

z čehož

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x} - v_\mathrm{o}\right) = -v_\mathrm{h}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,.$$

Integrací pravé strany podle hmotnosti dostaneme pro Mirkovu rychlost

$$v_\mathrm{M} = v_\mathrm{h}\ln\frac{m(0)}{m(n/f)}\,,$$

kde $t = n/f$ je čas, po kterém se sáček vyprázdní. Po dosazení

$$v_\mathrm{M} = v_\mathrm{h}\ln\frac{m_\mathrm{M} + nm_\mathrm{h}}{m_\mathrm{M}} \doteq 0{,}1193\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Pokud vám to přijde jako malá hodnota, zkuste si spočítat, jakou dráhu Mirek urazil.

Ještě poznamenejme, že pokud si hned na začátku uvědomíme, že $m_\mathrm{M} \gg nm_\mathrm{h}$, můžeme si problém linearizovat a získat výslednou rychlost ve tvaru

$$v_\mathrm{M} = v_\mathrm{h}\frac{nm_\mathrm{h}}{m_\mathrm{M} + nm_\mathrm{h}/2}\,,$$

což je blízké Taylorovu rozvoji výše uvedeného vzorce.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.40 ... drátek

Mějme tenký, dokonale černý drát kruhového průřezu o poloměru $r = 0{,}3\,\mathrm{mm}$ v tepelné rovnováze při pokojové teplotě ($T_0 = 20\,\mathrm{^\circ C}$) ve vakuu. Při pokojové teplotě má drátek délkový odpor $R_0 = 5\,\Omega/\mathrm{m}$. Pokud je teplotní koeficient odporu $\alpha = 0{,}004\,\mathrm{K^{-1}}$, určete jaký proud musíme drátem pustit, aby sa jeho teplota ustálila na $220\,\mathrm{^\circ C}$. *Filip si popálil prst.*

Keďže drôtik je vo vákuu, jediný spôsob výmeny energie s okolím je cez vyžarovanie a absorbovanie. Celkový výdaj energie je preto $P = 2\pi rl\sigma\left(T^4 - T_0^4\right)$, kde l je dĺžka a σ je Stefan-Boltzmannova konštanta. Potom stačí, aby pri danej teplote bol tento výkon rovný príkonu z elektrického prúdu, teda $P = I^2R = I^2R_0l\left(1 + \alpha(T - T_0)\right)$, z čoho následne dostaneme

$$I = \sqrt{\frac{2\pi r\sigma\left(T^4 - T_0^4\right)}{R_0\left(1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right)}}\,.$$

To po dosadení dá $I \doteq 0{,}78\,\mathrm{A}$.

Filip Ayazi
`filip@fykos.cz`

Úloha FoL.41 ... hydrofób

Na vodorovné části deštníku spočívá vodní kapka, mezi níž a deštníkem je poměrně velký kontaktní úhel $\vartheta_\mathrm{c} = 120^\circ$. Povrchové napětí mezi vodou a vzduchem je $\sigma_\mathrm{lg} = 73\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$. Poté do kapky přidáme malé množství saponátu, čímž se povrchové napětí sníží na $\sigma'_\mathrm{lg} = 56\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$ a kontaktní úhel klesne na $\vartheta'_\mathrm{c} = 90^\circ$. O kolik se muselo snížit povrchové napětí mezi povrchem deštníku a kapalinou? Výsledek udejte v jednotkách $\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$!

Mirek zkoumal svůj polámaný deštník.

Síly povrchového napětí působí mezi kapalinou a podložkou (napětí σ_sl), mezi vzduchem a podložkou (napětí σ_sg) a mezi kapalinou a vzduchem (napětí σ_lg). Aby došlo k vyrovnání těchto sil, musí být jejich vektorový součet nulový. Jelikož σ_sg a σ_sl jsou navzájem opačné síly v rovině podložky a síla mezi vzduchem a kapalinou je odchýlena o úhel ϑ_c od podložky, budou skalárně platit rovnosti pro kapalinu bez saponátu a se saponátem

$$\sigma_\mathrm{sg} - \sigma_\mathrm{sl} - \sigma_\mathrm{lg}\cos\vartheta_\mathrm{c} = 0\,,$$
$$\sigma'_\mathrm{sg} - \sigma'_\mathrm{sl} - \sigma'_\mathrm{lg}\cos\vartheta'_\mathrm{c} = 0\,.$$

Povrchové napětí mezi deštníkem a vzduchem se nezmění, tedy $\sigma'_\mathrm{sg} = \sigma_\mathrm{sg}$. Odečtením rovnic snadno nalezneme hledaný rozdíl

$$\sigma_\mathrm{sl} - \sigma'_\mathrm{sl} = \sigma'_\mathrm{lg}\cos\vartheta'_\mathrm{c} - \sigma_\mathrm{lg}\cos\vartheta_\mathrm{c} \doteq 36{,}5\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}\,.$$

Zkoumané povrchové napětí mezi materiálem deštníku a kapalinou poklesne po přidání saponátu o $36{,}5\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.42 ... rozděl a panuj

Při popisu plazmatu v magnetickém poli je často výhodné přejít do válcových souřadnic spojených s magnetickou siločárou. V těchto souřadnicích můžeme modelovat anizotropní rychlostní rozdělení takzvaným bimaxwellovským rozdělením

$$f(v_\perp, v_\parallel) = \exp\left(-\frac{\left(v_\parallel - \mu_\parallel\right)^2}{2\sigma_\parallel^2}\right)\exp\left(-\frac{(v_\perp - \mu_\perp)^2}{2\sigma_\perp^2}\right)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_\perp\sigma_\parallel}\,.$$

Indexy $\parallel$ a $\perp$ určují složky ve směru magnetického pole a kolmo na něj, úhlová složka byla již integrací vyjmuta (díky symetrii kolem válcové osy). Jsou zadány parametry rychlostního rozdělení $\sigma_\parallel = 10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\sigma_\perp = 4\cdot10^5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $\mu_\parallel = 4\cdot10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\mu_\perp = 3\cdot10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete střední rychlost částice popsané rozdělením $f(v_\perp, v_\parallel)$. *Mirek dodal něco z praxe.*

Pokud si rozdělení nakreslíme nebo představíme, je ihned zřejmé, že se jedná o dvě nezávislá rozdělení v ose rovnoběžné na pole a v ose na ně kolmé. V grafu s osami $v_\perp$ a $v_\parallel$ tedy bude maximum funkce $f(v_\perp, v_\parallel)$ (a díky symetrii dílčích rozdělení i střední hodnota) ležet v bodě $[\mu_\parallel, \mu_\perp]$. Z prosté Pythagorovy věty tak dostaneme

$$\mu = \sqrt{\mu_\parallel^2 + \mu_\perp^2} = 5\cdot10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Střední rychlost částic je $\mu = 5 \cdot 10^4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.43 ... kolotoč

Na kolotoči stojí bedna zanedbatelných rozměrů o hmotnosti $m = 5\,\mathrm{kg}$. Bedna je vzdálená $r = 10\,\mathrm{m}$ od středu kolotoče. Mezi bednou a kolotočem je statický koeficient tření $f_0 = 1$. Kolotoč se z klidu roztáčí s lineárně se zvyšujícím úhlovým zrychlením $\varepsilon = kt$, kde $k = 1\,\mathrm{s^{-3}}$. V jakém čase od začátku roztáčení kolotoče se bedna utrhne? *Kuba chtěl úlohu na Coriolise...*

Úhlová rychlost kolotoče je integrálem úhlového zrychlení, odtud plyne

$$\omega(t) = \frac{1}{2}kt^2\,.$$

Třecí síla F působí v soustavě spojené s kolotočem, kde má velikost právě takovou, aby bedna zůstávala v klidu (držela na kolotoči). Proti třecí síle působí výslednice odstředivé síly $F_\mathrm{o} = mr\omega^2$ ve směru radiálním a Eulerovy síly $F_\mathrm{E} = mr\varepsilon$ ve směru tečném. Můžeme tedy psát rovnováhu sil

$$F = \sqrt{F_\mathrm{o}^2 + F_\mathrm{E}^2} = mr\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = mkr\sqrt{t^2 + \frac{k^2t^8}{16}}\,.$$

Třecí síla může nabývat maximální hodnoty, která má velikost

$$F \leq mgf_0\,.$$

Pro mezní čas τ tedy dostáváme kvartickou rovnici

$$\frac{k^2\tau^8}{16} + \tau^2 - \left(\frac{gf_0}{kr}\right)^2 = 0\,,$$

kterou můžeme numericky vyřešit. Rovnice má jediný kladný kořen, dostáváme tedy $\tau \doteq 0{,}96\,\mathrm{s}$.

Jakub Dolejší
krasnykuba@fykos.cz

Úloha FoL.44 ... paradox dvojčat

Jedno z dvojčat odletí raketou na planetu vzdálenou $s = 5\,\mathrm{ly}$ a druhé dvojče zůstane na jejich domovské planetě. Raketa letí rychlostí $v = 0{,}2c$. V polovině dráhy s nasedne dvojče-kosmonaut na spěšný modul, který se od rakety začne vzdalovat rychlostí $u = 0{,}1c$ se stejným cílem jako má raketa. O kolik let bude kosmonaut mladší než jeho dvojče po přistání na cílové planetě? Zanedbejte veškeré jevy spojené se zrychlováním a zpomalováním vesmírných plavidel (počítejte, jako by vesmírná tělesa kolem sebe pouze prolétala a nepůsobila na ně gravitace). Abychom se vyhnuli problémům s relativitou současnosti, porovnávejte doby, jaké musela jednotlivá dvojčata čekat na přílet modulu k cílové planetě. *Všechny příklady na STR jsou profláklé.*

Vzdálenost budeme měřit ve světelných letech, čas v letech a rychlost v násobcích rychlosti světla.

První polovina cesty trvá v soustavě spojené s domovskou planetou

$$t_1 = \frac{s}{2v}\,.$$

Protože z hlediska rakety je první polovina plavby soumístná, platí jednoduchý vztah pro dilataci času v soustavě spojené s raketou

$$t_1' = \frac{s}{2v}\sqrt{1-v^2}\,.$$

Abychom mohli tentýž vztah[1] aplikovat i pro druhou polovinu cesty, musíme transformovat rychlost u ze soustavy spojené s raketou do soustavy spojené s domácí planetou. Získáváme

$$w = \frac{u+v}{1+uv}\,.$$

Protože druhá polovina plavby je soumístná z hlediska modulu, můžeme psát

$$t_2 = \frac{s}{2w}\,,$$

$$t_2' = \frac{s}{2w}\sqrt{1-w^2} = \frac{s}{2}\frac{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}{v+u}\,.$$

Nyní můžeme vyjádřit staří dvojčat ve tvaru

$$\tau = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{v} + \frac{1+uv}{u+v}\right)\,,$$

$$\tau' = \frac{s}{2}\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{v} + \frac{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}{u+v}\right)\,.$$

Rozdíl mezi dvojčaty je tedy

$$\Delta\tau = \frac{s}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v} + \frac{1+uv-\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}{u+v}\right) \doteq 0{,}63\,\mathrm{yr}\,.$$

Hledaný rozdíl ve věku dvojčat je 0,63 let.

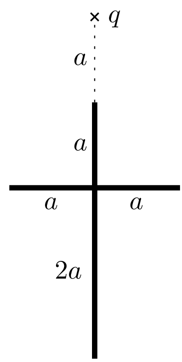
Jakub Dolejší
`krasnykuba@fykos.cz`

[1] Trvání druhé poloviny cesty bychom alternativně mohli dostat pohledem z rakety pomocí kontrakce délek (od rakety k cílové planetě – rychlost v) a následné dilatace času (z lodi na modul – rychlost u).

Úloha FoL.45 ... elektroupír

Máme nabitý nevodivý kříž a bodový náboj, umístěné jako na obrázku. Známe $a = 20\,\mathrm{cm}$, $q = 1\,\mathrm{\mu C}$ a délkovou hustotu náboje na kříži $\lambda = q/a$. Jak velkou elektrostatickou silou působí kříž na náboj?

Mirek se té úlohy bál jako čert kříže.



Označme směr kratší tyče jako osu x, směr delší tyče jako osu z, směr kolmo do nákresu bude osa y. Je zřejmé, že v ose y žádná síla působit nebude. Počátkem souřadnicové soustavy je bod, kde se tyče stýkají.

Podívejme se na kratší tyč. Jelikož je testovací bodový náboj přímo nad jejím středem, vyruší se silové působení v ose x a zbyde jen příspěvek v ose z. Element délky $\mathrm{d}x$ nacházející se v bodě $[x, 0, 0]$ přispívá ve zkoumaném bodě intenzitou

$$\mathrm{d}E_{1z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\,\mathrm{d}x\cos\alpha}{(2a)^2 + x^2}\,,$$

kde $\cos\alpha$ zprostředkovává průmět vektoru intenzity do osy z a platí

$$\cos\alpha = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + x^2}}\,.$$

Celkové E_{1z} od kratší tyče získáme integrací

$$E_{1z} = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}E_{1z} = \int_{-a}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\lambda a\,\mathrm{d}x}{(4a^2 + x^2)^{3/2m}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{2a\sqrt{4a^2 + x^2}}\right]_{-a}^{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

V případě svislé tyče je situace ještě jednodušší. Ze symetrie je opět nenulová pouze složka E_{2z} a pro příspěvek od elementu ve vzdálenosti z platí

$$\mathrm{d}E_{2z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}z}{z^2}\,.$$

Integrací získáme

$$E_{2z} = \int_{a}^{4a} \mathrm{d}E_{2z} = \int_{a}^{4a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}z}{z^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\lambda}{z}\right]_{a}^{4a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{3}{4}\,.$$

Hledaná elektrostatická síla je

$$F = q(E_{1z} + E_{2z}) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\,.$$

Po dosazení zadaných hodnot máme $F \doteq 0{,}27\,\mathrm{N}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.46 ... ohnisko

Na jedné straně tenké dvojvypuklé čočky, která má na obou stranách poloměr stěny $R = 20\,\mathrm{cm}$, je umístěno kulové zrcadlo tak, aby paprsek, prošed čočkou, byl odražen zpět do čočky a z ní vyšel ven na původní straně. Jaká je ohnisková vzdálenost (kladná) této soustavy? Index lomu skleněné čočky jest $n = 1{,}5$. *Zase ta zatracená optika!*

Ohnisko je místo, do kterého se zobrazí rovnoběžné paprsky, tedy budeme řešit soustavu zobrazovacích rovnic pro světlo se zdrojem v $a_0 = \infty$.

Tenká čočka má optickou mohutnost

$$\varphi = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}(n-1)$$

a kulové zrcadlo má ohniskovou vzdálenost rovnou

$$f' = \frac{R}{2}\,.$$

Postupně necháme zobrazit zdroj a_0 čočkou na a_1, a_1 zrcadlem na a_2 a a_2 opět čočkou na a_3,

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{a_1}\,,\\ \frac{2}{R} &= -\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\,,\\ \varphi &= -\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\,, \end{aligned}$$

kde jsme použili Jenskou konvenci. Tedy vzhledem k čočce zdroj před čočkou a obraz za ní mají kladnou polohu. Vzhledem k zrcadlu zdroj i obraz mají kladnou polohu na jeho duté straně.

Vyřešením této soustavy dostáváme ohniskovou vzdálenost celé soustavy ve formě posledního obrazu a_3

$$f = a_3 = \frac{R}{4n-2} = 5\,\mathrm{cm}\,.$$

Ohnisková vzdálenost soustavy je $5\,\mathrm{cm}$.

Jakub Dolejší
`krasnykuba@fykos.cz`

Úloha FoL.47 ... sisyfovská práce

Sisyfos stojí na dně jámy tvaru polokoule s poloměrem $R = 100\,\mathrm{m}$ a má za úkol z ní vytlačit zhruba kulový, hrbolatý balvan o hmotnosti $M = 1\,000\,\mathrm{kg}$ s poloměrem $r = 50\,\mathrm{cm}$. Efektivní rameno valivého odporu balvanu je $\xi = 4\,\mathrm{cm}$. Sisyfos tlačí kámen do svahu zanedbatelnou konstantní rychlostí, přičemž vynakládá sílu F_s, která má vždy vodorovný směr a prochází těžištěm balvanu. Sisyfovi dojdou síly, když vykoná práci $W_\mathrm{s} = 200\,\mathrm{kJ}$. O kolik se zvýší těžiště balvanu, než se Sisyfos vyčerpá? Změnu potenciální energie Sisyfa zanedbejte, tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Mirek se snažil zpracovat nepřečtené e-maily.*

Na situaci se díváme v řezu, v němž Sisyfos tlačí balvan. Sílu valivého odporu, která působí v bodě dotyku balvanu a země proti směru pohybu, vyjádříme jako

$$F_\mathrm{o} = F_\mathrm{n}\frac{\xi}{r}\,,$$

kde F_n je síla, kterou působí balvan kolmo k zemi. Ta je složena z jeho tíhové síly a Sisyfovy síly, tedy

$$F_\mathrm{n} = F_g \cos\alpha + F_\mathrm{s} \sin\alpha\,,$$

kde α je úhel mezi směrem pohybu balvanu a vodorovnou rovinou a $F_g = Mg$. Pomocí úhlu α také dokážeme vyjádřit změnu polohové energie balvanu

$$\Delta E_\mathrm{p} = Mg(R-r)(1-\cos\alpha) \approx MgR(1-\cos\alpha)\,.$$

Celková práce vykonaná Sisyfem je

$$W_\mathrm{s} = W_\mathrm{o} + Mg(R-r)(1-\cos\alpha)\,,$$

kde W_o je práce vykonaná odporovými silami na podložce. K určení velikosti odporové síly použijeme skalární rovnováhu sil

$$F_\mathrm{s}\cos\alpha = F_g \sin\alpha + F_\mathrm{o}\,,$$

jež nám po dosazení do rovnice pro valivý odpor umožní vyjádřit

$$F_\mathrm{o} = \frac{\frac{\xi}{r}Mg}{\cos\alpha - \frac{\xi}{r}\sin\alpha}\,.$$

Nyní budeme předpokládat $\cos\alpha \gg \xi/r \sin\alpha$ (ověříme později), můžeme tedy psát

$$F_\mathrm{o} \approx \frac{\xi}{r}Mg\frac{1}{\cos\alpha}\,.$$

Práce odporových sil je potom

$$W_\mathrm{o} \approx \frac{\xi}{r}RMg\int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\xi}{r}RMg\ln\left(\operatorname{tg}\alpha + 1/\cos\alpha\right)\,.$$

Rovnici pro úhel α, v němž se Sisyfos vyčerpá, dokážeme potom napsat v přibližném tvaru ($r \ll R$)

$$\frac{W_\mathrm{s}}{MgR} \approx \frac{\xi}{r}\ln\left(\operatorname{tg}\alpha + 1/\cos\alpha\right) + 1 - \cos\alpha\,.$$

Nyní už zbývá jen numericky nalézt fyzikálně smysluplný kořen $\alpha \doteq 0{,}566$ a můžeme (již bez aproximací) spočíst

$$\Delta y = (R-r)(1-\cos\alpha) \doteq 15{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

Sisyfos vykutálí balvan do výšky $\Delta y \doteq 15{,}5\,\mathrm{m}$. Můžeme ověřit, že aproximace $\cos\alpha \gg \xi/r\sin\alpha$ byla smysluplná, neboť $0{,}84 \gg 0{,}04$. Přesnější výpočet (integrace bez aproximací) dá výsledek $\Delta y \doteq 14{,}4\,\mathrm{m}$, který jsme samozřejmě také uznávali, nelze ho však již tak pěkně zapsat. Výsledek $\Delta y \doteq 20\,\mathrm{m}$, tj. zanedbání třecí síly, jsme již neuznávali.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.48 ... toč to

Máme jízdní kolo na podstavci a víme, že jeho zadní kolo má moment setrvačnosti kolem své osy $I = 0{,}5\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ *a poloměr* $r = 30\,\mathrm{cm}$. *Kolo roztáčíme tak, že vždy udeříme rukou na jeho obvodu ve směru otáčení. Rychlost úderu je* $w = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *vůči nehybnému pozorovateli, hmotnost ruky je* $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$, *ruka po úderu ztratí veškerou svou hybnost, kterou měla* v referenčním systému bodu dopadu úderu, vztaženo na obvodovou rychlost po dopadu. *(pohyb vychází z lokte, ale rotaci předloktí pro zjednodušení neuvažujeme). Jakou obvodovou rychlost bude mít kolo po deseti úderech?* *Mirek zase na něco šahal.*

Ruka je zde pro nás hmotný bod, který má při dopadu na kolo moment setrvačnosti vůči středu kola mr^2. Moment hybnosti, který ruka předá po n-tém úderu kolu (po úderu je vůči bodu na obvodu kola nehybná), je $mr(w - v_n)$, kde v_n je obvodová rychlost n-tém úderu. Celkový moment hybnosti kola po n-tém úderu je tedy

$$L_n = mr(w - v_n) + L_{n-1}\,.$$

Rekurentní vztah pro obvodovou rychlost kola potom na základě vztahu $L_n = I\omega_n$ bude

$$Av_n = w - v_n + Av_{n-1}\,,$$

kde jsme použili substituci $A = I/(mr^2)$.

Nyní zkusíme spočíst pár prvních členů posloupnosti. Dostaneme

$$v_1 = \frac{w}{1+A}\,,\quad v_2 = \frac{w}{1+A}\left(1 + \frac{A}{1+A}\right),\quad v_3 = \frac{w}{1+A}\left(1 + \frac{A}{1+A} + \left(\frac{A}{1+A}\right)^2\right),\quad \dots$$

Vztah pro v_n tedy bude zřejmě

$$v_n = \frac{w}{1+A}\left(1 + \frac{A}{1+A} + \dots + \left(\frac{A}{1+A}\right)^{n-1}\right).$$

Součtem geometrické řady a drobnou úpravou získáme

$$v_n = w\left(1 - \left(\frac{A}{1+A}\right)^n\right).$$

Hledaná rychlost je $v_{10} \doteq 4{,}54\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.49 ... ve dne v noci

Představte si, že pozorovatelný vesmír je sférický s průměrem $d = 10^{27}\,\mathrm{m}$ *a je vyplněn hvězdami, které sedí v uzlových bodech krychlové sítě s elementární buňkou o délce hrany* $a = 10^{19}\,\mathrm{m}$. *Hvězdy jsou identické s izotropním zářivým výkonem* $L = 10^{27}\,\mathrm{W}$ *a poloměrem* $r = 10^9\,\mathrm{m}$ *a navzájem si nijak nestíní; neexistuje absorpce. Jaký je výkon na metr čtvereční poblíž středu vesmíru na středu tělesové úhlopříčky elementární krychlové buňky?* Výsledek zadejte jako dekadický logaritmus vypočtené hodnoty! *Mirek koukal skrz hustý les.*

Plošný výkon na povrchu hvězdy je $\mathcal{L} = L/(4\pi r^2)$. Zkoumaný bod je od hvězd v rozích své elementární buňky vzdálen $a\sqrt{3}/2$. Pokud se budeme dívat na vyšší slupky, tedy krychle o hranách $3a$, $5a$, $7a$ atd., jejichž středem je zkoumaný bod, povšimneme si, že počet hvězd na těchto slupkách roste přibližně kvadraticky s jejich velikostí, neboť počet hvězd je úměrný ploše slupky. Zároveň víme, že zářivý výkon klesá s kvadrátem vzdálenosti od hvězdy, tedy obecně

$$L(r') = \frac{r^2}{r'^2} L(r)\,.$$

Zavedeme-li hvězdnou hustotu $n = 1/a^3$, dokážeme hledaný plošný výkon vyjádřit jako integrál

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \int_0^{d/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{L}\frac{r^2}{\varrho^2} n \sin\vartheta\, \varrho^2 \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho = 4\pi\mathcal{L}r^2\frac{d}{2} = \frac{d}{2a^3}L \doteq 5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}\,.$$

Tento výsledek by mohl být zatížen velkou chybou od blízkých hvězd, kde je aproximace špatná – jak však vidíme, i nejbližší hvězdy jsou dostatečně vzdálené. Příspěvek nejbližších osmi hvězd je

$$\mathcal{L}_8 = 8\left(\frac{r}{a\sqrt{3}/2}\right)^2 \mathcal{L} \doteq 8\cdot 10^{-12}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}\,,$$

tedy zcela zanedbatelný vůči hodnotě $\mathcal{L}_{\text{tot}}$ (stačí si uvědomit, že když počet hvězd ve slupce roste kvadraticky s rozměrem slupky a zároveň intenzita záření klesá se čtvercem vzdálenosti, musí každá slupka přispívat stejným dílem). Pomocí numerického výpočtu po slupkách můžeme ověřit, že naše spojitá aproximace je dostatečně přesná.[2]

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.50 ... pohoda u rybníku

Je léto a my odpočíváme na hrázi hlubokého rybníka. Sluníčko svítí, tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, povrchové napětí vody je $\sigma = 72{,}8\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$, hustota vody $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Ve vzdálenosti $d = 30{,}0\,\mathrm{m}$ od břehu se vynoří znakoplavka a vytvoří na hladině kruhově se šířící vlnky. Když se zaměříme na jednu vlnku, vidíme, že se od doby vzniku do zániku pohybuje rychlostí $c = 1{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Za jak dlouho ke hrázi dorazí čelo vlnění, které znakoplavka vytvořila? K řešení využijte znalost vztahu pro fázovou rychlost vln na hluboké vodě $c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\varrho}}$, kde k je vlnové číslo.

Mirek pletl meteorologické a astronomické gravitační vlny.

Fázová rychlost je definována jako podíl úhlové frekvence vlny a vlnového čísla, tedy

$$c = \frac{\omega}{k}\,.$$

Odtud dokážeme vyjádřit

$$\omega(k) = \sqrt{gk + \frac{\sigma k^3}{\varrho}}\,.$$

[2] Pro zadané hodnoty je ovšem nesnadné provést výpočet v nějakém rozumném čase, vhodnou testovací hodnotou je např. $d = 10^3 a$.

Abychom určili, za jak dlouho k nám vlna dorazí, potřebujeme znát grupovou rychlost

$$c_{\mathrm{g}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{g + \frac{3\sigma k^2}{\varrho}}{2\sqrt{gk + \frac{\sigma k^3}{\varrho}}}\,.$$

Vlnové číslo k určíme z definice fázové rychlosti

$$c^2 = \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\varrho}\,,$$

$$0 = k^2 - \frac{\varrho c^2}{\sigma} k + \frac{\varrho g}{\sigma}\,.$$

Není užitečné dosazovat obecné vyjádření k do vzorce pro grupovou rychlost. Kvadratickou rovnici stačí vyřešit a správný kořen (ten s mínusem – když je σ malé, nemělo by k růst do nekonečna) dosadit do vyjádření grupové rychlosti číselně. Grupovou rychlost dosadíme do vztahu pro hledaný čas $t = d/c_{\mathrm{g}}$ a získáme

$$t = d\left(c - \frac{c}{2}\sqrt{1 - \frac{4\sigma g}{\varrho c^4}}\right)^{-1} \doteq 59{,}9\,\mathrm{s}\,.$$

Všimněte si, že tento výsledek se jen málo liší od hodnoty $t = 60\,\mathrm{s}$, kterou bychom dostali, kdybychom nebrali v potaz povrchové napětí. Je také navýše pravděpodobné, že by se na reálném rybníce drobné vlnky od znakoplavky utlumily dříve, než by k hrázi dorazily.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.51 ... přípitek

Chceme si připít a vzali jsme si k tomu velice zvláštní skleničku. Jedná se o dutou krychli o vnitřním objemu $V = 1\,\mathrm{l}$, která je postavená na špičku (tělesová úhlopříčka je kolmá na vodorovnou rovinu). Malým otvorem u horního vrcholu napustíme do krychle $V' = 1/3\,\mathrm{l}$ vína. Do jaké výšky od země (tj. od vrcholu, na kterém krychle stojí) víno vystoupá? Tloušťku stěn krychle zanedbejte. Výsledek udejte v násobcích délky hrany krychle!

Mirek se smíšenými pocity vzpomínal na stereometrii.

K řešení úlohy se bude hodit, když si nejprve odvodíme některé vztahy v pravidelném trojbokém jehlanu, jehož hrany svírají pravý úhel při hlavním vrcholu. Nechť je strana podstavy b, hrana a a výška v. Vztah mezi b a a lze jednoduše získat z Pythagorovy věty pro stěnu pláště jako

$$b(a) = \sqrt{2}\,a\,.$$

Dále se nám bude hodit výška podstavy v_{b}, kterou opět určíme pomocí Pythagorovy věty pro trojúhelník (vrchol podstavy)-(vrchol podstavy)-(pata výšky podstavy) jako

$$v_{\mathrm{b}} = \frac{\sqrt{3}}{2} b\,.$$

Dále se nám bude hodit vyjádření v v závislostech na a a na b. Označme s vzdálenost vrcholu podstavy od barycentra podstavy. Barycentrum dělí těžnice na části v poměru délek 2 : 1.

Navíc, v rovnostranném trojúhelníku (což naše podstava je) splývají těžnice s výškami, a proto i barycentrum s ortocentrem. Pro velikost s tedy bude platit

$$s = \frac{2}{3}v_\mathrm{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}b\,.$$

Uvědomme si, že v našem jehlanu splývá pata výšky s ortocentrem podstavy. Nyní uvážíme-li Pythagorovu větu pro trojúhelník (vrchol podstavy)-(hlavní vrchol)-(ortocentrum podstavy), dostaneme vztah pro výšku jehlanu v:

$$v = \sqrt{a^2 - s^2} = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{3}b^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}b\,.$$

Ještě budeme potřebovat obsah podstavy S. Pro něj máme

$$S = \frac{1}{2}bv_\mathrm{b} = \frac{\sqrt{3}}{4}b\,.$$

Konečně teď můžeme spočítat objem jehlanu V jako

$$V = \frac{1}{3}vS = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{6}}{6}b^3 = \frac{\sqrt{2}}{24}b^3\,,$$

nám se ale bude více hodit vyjádření v a

$$V = \frac{1}{6}a^3$$

a ve v

$$V(v) = \frac{\sqrt{3}}{2}v^3\,.$$

Nyní se vraťme k naší úloze. Pokud bychom do krychle nalili víno o objemu menším nebo rovném $16\,\mathrm{l}$,[3] víno by mělo tvar pravidelného trojbokého jehlanu, jehož hrany svírají pravý úhel při hlavním vrcholu a naše úloha by již byla vyřešena. Stejně tak pro objem nad $56\,\mathrm{l}$, kde by stačilo dopočítat výšku nezaplněné části a tu odečíst od tělesové výšky krychle $v_\mathrm{T} = \sqrt{3}\,a$. Kritický objem je $16\,\mathrm{l}$ právě proto, že toto je objem jehlanu, který bychom získali řezem krychlí přes její tři vrcholy s nejmenší nenulovou výškou (jednalo by se o „náš" jehlan s hranou rovnou hraně krychle).

Bohužel náš objem spadá do oblasti $\left\langle \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right\rangle$. Prodlužme hrany krychle vedoucí z vrcholu na zemi ve směrech vzhůru. Nyní uvažujme rovinu rovnoběžnou se zemí ve vzdálenosti v od země, kde $\frac{\sqrt{3}}{3}a \leq v \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}a$, tj. ve výškách neodpovídajícíh dříve diskutovaným případům. Vrchol na zemi a průsečíky prodloužených hran nám tvoří vrcholy pravidelného trojbokého hranolu, jehož hrany svírají pravý úhel při hlavním vrcholu a jež má výšku v. Tento jehlan ale zasahuje i mimo krychli. Uvažujme nyní trojici vrcholů krychle, která se nachází pod rovinou ve stejné výšce, tj. právě ty tři vrcholy krychle, který každý leží na jedné prodloužené hraně. Uvažujme průsečíky hran krychle vedoucích z těchto vrcholů směrem vzhůru s rovinou, tj celkem 6 bodů, po dvou příslušných ke každému vrcholu. Každý z těchto tří bodů tvoří spolu s těmito dvěma průsečíky a průsečíkem prodloužené hrany s rovinou vrcholy jehlanu. Tento jehlan je opět pravidelný trojboký s pravými úhly mezi hranami při hlavním vrcholu, jeho hlavní vrchol je příslušný

[3] $1\,\mathrm{l} = a^3$

vrchol krychle a jeho výška je $v - \frac{\sqrt{3}}{3}a$, protože $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ je vzdálenost onoho vrcholu krychle od země. Tyto tři jehlany zaplňují veškerý objem původního předchozího velkého jehlanu, který zasahuje mimo krychli. Chceme-li tedy určit objem krychle, který bude zaplněn, je-li hladina vína ve výšce v, pro ten bude platit

$$V_{\mathrm{clk}}(v) = V(v) - 3V\left(v - \frac{\sqrt{3}}{3}a\right) .$$

provedeme-li homogenizaci $w = v/a$ a dosadíme-li za $V(v)$, dostáváme

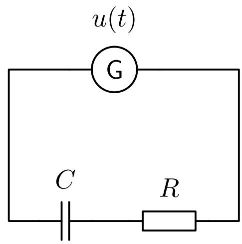
$$V_{\mathrm{clk}}(w) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(w^3 - 3\left(w - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\right) .$$

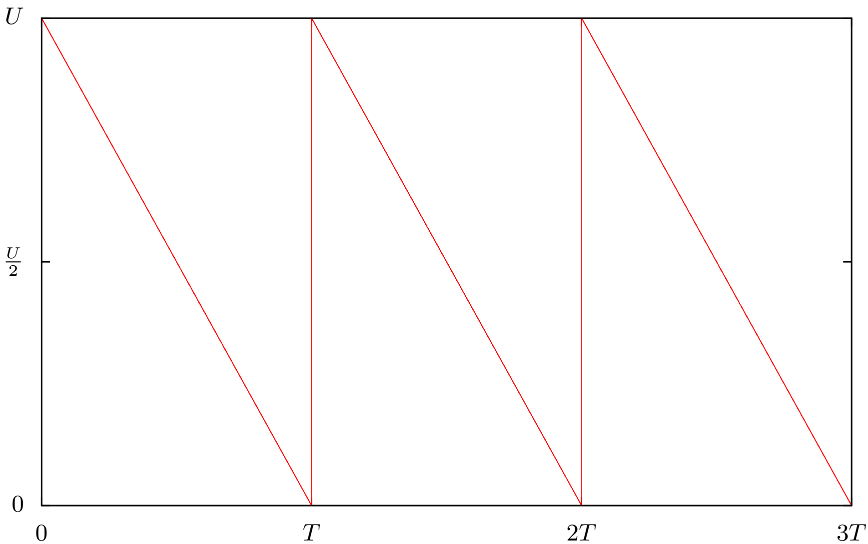
Vyzkoušejte, že dosazením $w = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tj. poloviny tělesové výšky krychle dostaneme $V_{\mathrm{clk}} = \frac{1}{2}$ a dosazením kritických výšek $\frac{\sqrt{3}}{3}$ a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ dostáváme postupně správné kritické objemy $\frac{1}{6}$ a $\frac{5}{6}$. Nyní stačí položit $V_{\mathrm{clk}} = \frac{1}{3}$ a rovnici vyřešit. Jedná se o kubickou rovnici, jejíž analytické řešení lze nalézt pomocí Cardanových vzorců, nicméně pro potřeby soutěže stačí nalézt výsledek číselně, což lze efektivněji udělat například pomocí služby Wolfram Alpha a vybrat správný kořen, který leží mezi kritickými výškami $\frac{\sqrt{3}}{3}$ a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Číselně tato výška vychází 0,7347 hrany krychle.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.52 ... pila

Do sériového RC obvodu připojíme tónový generátor generující pilový průběh napětí $u(t)$. Rezistor má odpor $R = 200\,\Omega$, kondenzátor má kapacitu $C = 50\,\mu\mathrm{F}$, maximální napětí na zdroji má velikost $U = 5\,\mathrm{V}$. Pro periodu napětí $T = RC$ spočtěte, jaký proud prochází obvodem v okamžicích, kdy je na zdroji maximální napětí (resp. v okamžicích hned po dosažení maximálního napětí na zdroji), po dlouhé době od zapnutí. *Kuba si myslel, že ještě není příklad na obvody.*





Obr. 2: Průběh napětí.

V rámci jedné periody platí pro napětí

$$u(t) = U\left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

a na konci nespojitě skočí zpět na $u(T) = U$.

Napišme si Kirchhoffův zákon pro tento obvod v průběhu jedné periody,

$$u(t) = RI(t) + \frac{q(t)}{C}\,, \tag{1}$$

kde $I(t)$ je proud procházející obvodem v čase $t \in (0, T)$ a $q(t)$ je náboj na kondenzátoru. Při polaritě náboje zvolené tak, aby byla v souladu s rovnicí (1), platí

$$\dot{q}(t) = I(t)\,.$$

Zderivováním (1) a dosazením za $\dot{u}(t)$ a $\dot{q}(t)$ dostáváme diferenciální rovnici

$$-\frac{U}{T} = R\dot{I}(t) + \frac{I(t)}{C}\,,$$

jejímž řešením dostáváme vývoj proudu v čase ve tvaru

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \frac{CU}{T}\,, \tag{2}$$

kde máme neznámou konstantu I_0, kterou potřebujeme vyjádřit.

Protože obvod je v ustáleném stavu (periodicky se měnícím), musí na kondenzátoru být stejný náboj na začátku a na konci každého cyklu. Jediný problém je rozmyslet si, co se děje s nábojem během nespojité změny napětí. Změna náboje, vyjádřená jako integrál proudu, v daném časovém intervalu (nekonečně krátkém) bude nulová, protože proud během tohoto intervalu nespojité skočí pouze o konečný rozdíl. Proto musí být nulová i změna náboje během fáze, kdy napětí klesá.

Náboj si vyjádříme z (1), kam dosadíme za $I(t)$. Dostáváme

$$q(t) = CU\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \frac{RC^2U}{T} - RCI_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\,.$$

Nulový rozdíl nábojů na začátku a konci cyklu je

$$0 = \Delta q = q(T) - q(0) = -CU + RCI_0\left[1 - \exp\left(-\frac{T}{RC}\right)\right]\,.$$

Odtud dostáváme

$$I_0 = \frac{U}{R\left[1 - \exp\left(-\frac{T}{RC}\right)\right]}\,.$$

Nyní už můžeme vyjádřit požadovaný proud – do rovnosti (2) dosadíme za I_0, za čas dosadíme $t = 0$ a za periodu dosadíme ze zadání $T = RC$.

$$I(0) = \frac{U}{R\left[1 - \exp\left(-\frac{T}{RC}\right)\right]} - \frac{CU}{T} = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{\mathrm{e} - 1} \doteq 14{,}5\,\mathrm{mA}\,.$$

Proud procházející obvodem v udaných okamžicích je 14,5 mA.

Jakub Dolejší
`krasnykuba@fykos.cz`

Úloha FoL.53 ... propuštěný a vypuštěný

Uvažujme jednoduchý model statické jednorozměrné atmosféry a označme relevantní souřadnici (výšku nad povrchem) jako h. Pokud bychom vzali velmi tenkou vrstvičku této atmosféry o tloušťce Δh, spočítali bychom její odrazivost jako $r(h)\Delta h$. Jakou část světla atmosféra propustí, pokud $r(h) = r_0 \mathrm{e}^{-kh}$, kde $k = r_0 = 0{,}1\,\mathrm{m}^{-1}$? *Hlas ze záhrobí.*

Nejdříve budeme uvažovat atmosféru konečné tloušťky L, na kterou z jedné strany kolmo na rozhraní dopadá světelný tok I_0. Souřadnici kolmou na rozhraní vrstvy označme x, takže $x = 0$ na straně, kde dopadá tok I_0 a $x = L$ na straně opačné. Uvnitř vrstvy potečou fotony oběma směry. Označme $I_+(x)$ tok ve směru rostoucího x a I_- tok ve směru opačném. Potom zřejmě $I_+(0) = I_0$, $I_-(0) = RI_0$, $I_+(L) = TI_0$ a $I_-(L) = 0$, kde R je celková odrazivost a T celková propustnost vrstvy.

Uvážíme-li uvnitř této vrstvy velmi tenkou vrstvičku o tloušťce Δx, píšeme

$$\begin{aligned} I_+(x+\Delta x) &= \big(1 - r(x)\Delta x\big) I_+(x) + r(x)\Delta x I_-\left(x+\Delta x\right) , \\ I_-(x) &= \big(1 - r(x)\Delta x\big) I_-\left(x+\Delta x\right) + r(x)\Delta x I_+(x) , \end{aligned}$$

odkud vyjádříme $I_+(x+\Delta x)$ a $I_-(x+\Delta x)$,

$$\begin{aligned} I_+\left(x+\Delta x\right)\big(1 - r(x)\Delta x\big) &= \big(1 - 2r(x)\Delta x\big) I_+(x) + r(x)\Delta x I_-(x) , \\ I_-\left(x+\Delta x\right)\big(1 - r(x)\Delta x\big) &= I_-(x) - r(x)\Delta x I_+(x) . \end{aligned}$$

Rozvineme-li toto do prvního řádu v Δx, dostaneme v limitě $\Delta x \to 0$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I_+}{\mathrm{d}x} &= r(x)(I_- - I_+) , \\ \frac{\mathrm{d}I_-}{\mathrm{d}x} &= r(x)(I_- - I_+) . \end{aligned}$$

To znamená, že $\mathrm{d}(I_- - I_+)/\mathrm{d}x = 0$, tedy $I_-(x) - I_+(x) = \mathrm{konst} = -I_+(L) = -I_0 T$ a máme tak po dosazení do předchozího vzorce $\mathrm{d}I_+/\mathrm{d}x = r(x)(I_- - I_+) = -r(x)I_0T$, z toho můžeme vyvodit

$$-I_0 T \int_0^L r(x)\,\mathrm{d}x = I_+(L) - I_+(0) = (T-1)I_0 .$$

Odtud můžeme vypočítat

$$T = \left(1 + \int_0^L r(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1} .$$

V našem případě $r(x) = r_0 \mathrm{e}^{-k(L-x)}$ a $L \to \infty$, takže

$$T_{\mathrm{atm}} = \lim_{L\to\infty} \left(1 + r_0 \mathrm{e}^{-kL} \int_0^L \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x\right)^{-1} = \frac{k}{r_0 + k} = \frac{1}{2} .$$

Atmosféra propustí 50 % světla.

Kuba Vošmera
`kuba@fykos.cz`

Úloha FoL.54 ... na přechodu

Mějme systém, ve kterém existuje nekonečno možných diskrétních stavů seřazených podle indexu $i \in \mathbb{N}$ (kladná celá čísla). Stav celého systému můžeme popsat stavovým vektorem $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots)$, kde f_i označuje počet objektů nacházejících se ve stavu i. Systém se v čase vyvíjí v diskrétních krocích. Pravděpodobnost přechodu během jednoho časového kroku ze stavu i do stavu $i+1$ je $P_{i,i+1} = 1/i^2$, pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu $i-1$ je $P_{i,i-1} = 1 - P_{i,i+1}$. Z vlastností pravděpodobnosti plyne, že přechod mezi nesousedícími stavy nebo setrvání v daném stavu není povoleno. Na počátku se nacházejí objekty pouze ve stavu f_1. Nalezněte ustálený stav, ke kterému systém konverguje, a udejte počet objektů v prvním stavu *po ustálení f_1^0 jakožto násobek celkového počtu objektů v systému N. Předpokládejte, že N je velmi velké číslo. Počet objektů se během časové evoluce zachovává.*

Mirek přecházel přes přechod.

Časový vývoj systému můžeme popsat pomocí rekurentní rovnice

$$\boldsymbol{f}_{t+1} - \boldsymbol{f}_t = A\boldsymbol{f}_t$$

která ve skutečnosti představuje nekonečněrozměrnou soustavu lineárních diferenčních rovnic, jejichž koeficienty jsou určeny maticí A. Tato matice vypadá následovně:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & P_{21} & 0 & 0 & \cdots \\ P_{12} & -1 & P_{32} & 0 & \cdots \\ 0 & P_{23} & -1 & P_{43} & \cdots \\ 0 & 0 & P_{34} & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 8/9 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/4 & -1 & 15/16 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/9 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Řešení této rovnice dokážeme vyjádřit jako maticovou exponenciálu, jejíž explicitní vyjádření by však vyžadovalo řešit úlohu na vlastní čísla pro nekonečněrozměrný případ. Tomu se ale vyhneme tím, že využijeme jednoduchého tvaru matice a řešení „vykoukáme“.

Nechť známe stabilní vektor $\boldsymbol{f}^0$. Bez újmy na obecnosti volme velikost první složky $f_1^0 = 1$ (později můžeme provést renormalizaci). Aby se tento vektor při působení matice A neměnil, musí z druhého stavu do prvního přejít množství objektů 1, neboť žádný jiný stav než druhý nedotuje ten první. Tedy nutně $f_2^0 = 4/3$, neboť $P_{21} = 3/4$. Zároveň víme, že do druhého stavu přejde z prvního množství $P_{12} f_1^0 = 1$, a tedy ze třetího stavu musí do druhého přejít $4/3 - 1 = 1/3$. Ze znalosti P_{32} už snadno dopočteme, že $f_3^0 = 3/8$. Touto metodou dokážeme dostávat postupně další členy

$$f_4^0 = 2/45\,,\; f_5^0 = 5/1728\,,\; f_6^0 = 1/8400\,,\; \dots\,.$$

Obecně prvek f_n^0 musí představovat $1/(1-1/n^2)$ ze členu, který představuje $1/(n-1)^2$ z předchozího prvku f_{n-1}^0 (to se dá odvodit porovnáním množství objektů, které projdou oběma směry mezi stavy n a $n-1$). Máme tedy rekurzivní vztah

$$f_n^0 = \frac{n^2}{n^2-1}\frac{1}{(n-1)^2} f_{n-1}^0\,.$$

Tento vztah lze rozepsat až do prvního elementu stavového vektoru $f_1^0 = 1$ jakožto (platí pro $n > 1$)

$$f_n^0 = n^2 \prod_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(n-k)^2 - 1}\,.$$

Celkový počet objektů v našem systému lze tedy vyjádřit jako

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^0 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \prod_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(n-k)^2 - 1}\,.$$

Jelikož řada rychle konverguje, stačí nám sečíst několik prvních členů a dostaneme poměrně přesný výsledek. Počítačové algebraické systémy nám napoví, že přesný výsledek je $N = 4I_2(2)f_1^0 \doteq 2{,}756$, kde I_j je modifikovaná Besselova funkce j-tého řádu. Zadání se nás ptá na opačné číslo, tedy $1/(4I_2(2)) \doteq 0{,}3629$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.55 ... megamagnet

Máme válcovou cívku s délkou $l = 100\,\mathrm{km}$, průměrem podstavy $d = 1\,\mathrm{km}$ a $N = 10^6$ zavity, kterou prochází proud $I = 1\,\mathrm{kA}$. Jaké elektrické pole budeme cítit, pokud právě letíme ven z cívky rovnoběžně s její osou ve vzdálenosti $r = 1\,\mathrm{m}$ od osy rychlostí $v = 1\,000\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$? Efekty obecné teorie relativity neuvažujte. *Xellos pozeral Cerveneho Trpaslika.*

Keďže $v \ll c$, nemusíme uvažovať ani efekty špeciálnej teórie relativity. Taktiež nemusíme uvažovať Maxwellov prúd v Ampérovom zákone a môžeme predpokladať, že cítime rovnaké magnetické pole ako bez pohybu (ak neveríte, môžete si presne prepočítať relativistickú transformáciu polí E a B).

Úlohu teraz môžeme riešiť cez Maxwellove rovnice – konkrétne elektrické pole musí spĺňať Gaussov zákon $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0$ (nikde nemáme náboj) a Faradayov indukčný zákon

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} = -v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}z}\,,$$

kde sme časovú zmenu mag. poľa nahradili pohybom popri ose. Magnetické pole vnútri dlhej cievky je prakticky paralelné s osou. Na kraji cievky sa síce bude postupne odchyľovať od osi, ale pre $r \ll d$ len zanedbateľne, povedzme preto, že $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_z(z))$ (pracujme vo valcových súradniciach (r, φ, z)).

Spomenutá sústava rovníc je stále dosť zložitá, hlavne preto, že elektrické pole má tri neznáme zložky, ktorých derivácie sa dosť miešajú. Nič nám ale nebráni tipnúť si $E_z = 0$ (skutočne, v relativistickej transformácii vychádza, že pole sa v smere rýchlosti netransformuje). Teraz z osovej symetrie + Gaussovho zákona už vychádza, že $E_r = 0$, pretože E_φ aj E_r budú závisieť len na r. Faradayov zákon sa teraz zjednoduší (v integrálnom tvare) na $2\pi r E_\varphi = v\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}\pi r^2$ – predstavme si slučku s polomerom r, ktorá sa kĺže po ose cievky, potom je na ľavej strane rovnice indukované napätie v slučke a na pravej strane zmena mag. toku.

Ešte nám ostáva nájsť $\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}$ pri osi na kraji cievky. „Pri osi" je kľúčové, vieme totiž, že pre jednu slučku so stredom v bode $(r = z = 0)$ a prúdom I je mag. pole pri osi z Biot-Savartovho zákona

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I (d/2)^2}{2(z^2 + d^2/4)^{3/2}}\,.$$

Cievku môžeme z druhého konca natiahnuť do nekonečna – na mag. pole by to malo mať zanedbateľný vplyv – a predstaviť si ju ako $\frac{xN}{l}$ tenkých slučiek na x metrov dĺžky. Magnetické pole môžeme vyjadriť ako integrál cez tieto slučky:

$$B_z = \int_0^\infty \frac{\mu_0 I d^2}{(4z^2 + d^2)^{3/2}}\frac{N}{l}\mathrm{d}z\,.$$

Integrál nemusíme riešiť (ale môžeme, vychádza $\mu_0 NI/2l$), hľadáme totiž jeho deriváciu podľa z – a tá je rovná vnútru integrálu pre $z = 0$. Výsledné el. pole je

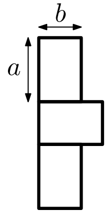
$$E = \frac{\mu_0 NIvr}{2ld} \doteq 6{,}3\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}\,.$$

Vidíme, že E je úmerné v aj r, čo zodpovedá očakávaniu, že $E = 0$, keď $v = 0$ alebo $r = 0$.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha M.1 ... kostičky

Určete maximální poměr stran kostičky a/b, pokud má platit, že když si ze tří takových kostiček slepíme dohromady věž, kterou postavíme na výšku, tak je ještě stabilní. Věž je uvedena na obrázku. *Náryho vzpomínky na lego.*



Pro vyřešení tohoto problému si pomůžeme tvrzením, které říká, že pokud se těžiště tuhého tělesa nachází nad podstavou, těleso je stabilní. Abychom při zadané šířce b maximalizovali délku a, musíme požadovat, aby se těžiště celého útvaru nacházelo co nejdál od levého konce prostřední kostičky. Nejdále, kde se však může nacházet, je vzdálenost b, protože právě tam končí podstava spodní kostičky.

Když uvážíme, že spodní a vrchní kostička mají vždy těžiště ve vzdálenosti $b/2$ od levého konce, dojdeme při uplatnění rovnováhy na páce k závěru, že těžiště prostřední kostičky je ve vzdálenosti $2b$ od levého konce kostiček, tedy délka kostičky je $4b$. Poměr je potom $4 : 1$.

Rovnováha na páce má tvar

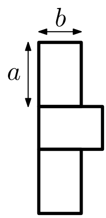
$$2Mg\left(x - \frac{b}{2}\right) = 3Mg(x - b)\,,$$

kde Mg je tíhová síla jedné kostičky, x je vzdálenost těžiště prostřední kostičky od jejího levého konce.

Jiří Nárožný
nahry@fykos.cz

Úloha M.2 ... kostičky se vrací!

Určete maximální poměr stran kostičky, a/b, když si ze tří takových kostiček ještě můžeme postavit věž uvedenou na obrázku, aniž by ihned spadla.
Náryho vzpomínky na lego.



Nyní musíme být opatrnější než v předchozí úloze, protože zde už nelze použít předešlý argument, tedy že stabilita tělesa nastane právě, když je těžiště nad podstavou. To proto, že některé dílčí síly, potažmo momenty sil, se už nemusí vyrušit jako dříve, jelikož na sebe kostičky můžou působit pouze tlakem, nikoliv však už tahem.

Budeme tedy vyšetřovat stabilitu pro každou kostičku zvlášť. Stabilita spodní kostičky je ale zajištěna automaticky, jelikož tlaková síla země se spodní kostičce přizpůsobí. Na vrchní kostičku působí tlakem kostička prostřední a gravitace, na prostřední kostičku působí spodní i vrchní kostička a také gravitace. Na vrchní kostičku působí prostřední kostička tak, že výslednice sil i výslednice momentů sil vůči libovolnému bodu přesně kompenzuje účinky gravitační síly na vrchní kostičku působící. Označme si tuto sílu Mg. Z principu akce a reakce přesně taková síla působí na prostřední kostičku. Působiště této síly na prostřední kostičku je tedy $b/2$ od jejího levého konce, kde b je šířka kostičky.

Dále, na prostřední kostičku působí ta spodní, a to silou, která je rovna součtu tíhových sil dvou kostiček, které spodní kostička nese. Tedy silou $2Mg$. Abychom docílili maximální délky strany kostičky a, musíme maximalizovat vzdálenost těžiště prostřední kostičky od místa působiště vrchní kostičky. Toho docílíme tak, že spodní kostička na prostřední kostičku bude tlačit v místě, které je od levého konce prostřední kostičky vzdáleno b. Uplatníme-li podmínku rovnováhy na páce, zjišťujeme, že vzdálenost těžiště prostřední kostičky od jejího levého konce je $3b/2$, takže celková délka kostičky je $3b$. Poměr tedy vychází $3 : 1$.

Pro úplnost, podmínka rovnováhy na páce má tvar

$$2Mg(x - b) = Mg\left(x - \frac{b}{2}\right),$$

kde x je vzdálenost těžiště prostřední kostičky od jejího levého konce.

Jiří Nárožný
`nahry@fykos.cz`

Úloha M.3 ... srážka nevyhnutelná

Kolik nejméně kinetické energie se může ztratit při dokonale nepružné centrální srážce dvou tuhých koulí o hmotnostech $m = 3\,\mathrm{kg}$ *a* $M = 2\,\mathrm{kg}$*, když jedna z koulí má rychlost* $5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a druhá* $6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*?* *Náry, ze života.*

Pro vyřešení úlohy si nejprve musíme uvědomit, že když chceme nejnižší pokles energie, je potřeba, aby výsledná rychlost po srážce byla co nejvyšší, čehož můžeme docílit tak, že obě koule se pohybují v jedné přímce za sebou stejným směrem.

Dále je pak důležité, že absolutní velikost ztráty kinetické energie systému dvou tuhých koulí bude nezávislá na tom, jestli je hmotnější koule rychlejší nebo pomalejší. Proč tomu tak je? Zkusme si odvodit obecný vzorec pro ztrátu kinetické energie při nepružné centrální srážce, pak už bude argument jasný.

Počáteční rychlost koule s hmotností m si označme v_1, počáteční rychlost koule s hmotností M si označme v_2. Po srážce se budou obě koule pohybovat společnou rychlostí w, jejíž velikost zjistíme ze zákona zachování hybnosti. Platí

$$mv_1 + Mv_2 = (m + M)w\,,$$

tedy

$$w = \frac{mv_1 + Mv_2}{m + M}\,.$$

Obecné vyjádření ztráty kinetické energie ΔE_k je potom rozdíl kinetické energie systému před srážkou a kinetické energie systému po srážce, tj.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 = \Delta E_\mathrm{k} + \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{mv_1 + Mv_2}{m + M}\right)^2.$$

Po drobné úpravě zjistíme, že úbytek kinetické energie ΔE_k lze vyjádřit jako

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}\left(v_1 - v_2\right)^2 .$$

Z posledního vzorce je jasně vidět, že při číselné výměně rychlostí získáme jen opačné číslo pod druhou mocninou, což dává opět totéž číslo. Z tohoto důvodu si dle libovůle zvolíme $v_1 = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 = 6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Po číselném dosazení nám vychází $\Delta E_\mathrm{k} \doteq 0{,}6\,\mathrm{J}$.

Jiří Nárožný
`nahry@fykos.cz`

Úloha M.4 ... není hůl jako hůl

Tuhou homogenní tyč délky $l = 1\,\mathrm{m}$ vyhodíme v homogenním gravitačním poli. V jednom okamžiku dosáhne translační kinetická energie stejné velikosti jako rotační kinetická energie. V tomto okamžiku byla rychlost těžiště tyče $9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Spočtěte okamžitou úhlovou rychlost otáčení tyče ve chvíli výhozu. *Každý někdy potkal rotující hůl.*

Jelikož se tyč pohybuje v homogenním gravitačním poli, velikost její rotační rychlosti, stejně jako rotační kinetická energie jsou neměnné. Rovnost kinetických energií je potom dána vztahem

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 .$$

Písmenem m jsme označili hmotnost tyče, v je translační rychlost tyče, tedy rychlost těžiště. Dále jsme označili písmenem J moment setrvačnosti tyče, pro který navíc platí $J = ml^2/12$, kde l je délka tyče. Písmeno ω pak značí námi hledanou úhlovou rychlost rotace. Z této rovnice už jen algebraickými úpravami vyjádříme hledanou úhlovou rychlost

$$\omega = \frac{2\sqrt{3}\,v}{l} .$$

Číselně potom $\omega \doteq 31{,}2\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Jiří Nárožný
`nahry@fykos.cz`

Úloha E.1 ... nabitý Fykosák

Elektricky neutrální pták Fykosák byl obohacen o 10^{12} elektronů. Vlétl rychlostí $v_0 = 3{,}6\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ do homogenního elektrického pole, a to proti směru jeho siločar. Toto pole má intenzitu $500\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$. Jakou rychlost v bude mít pták Fykosák poté, co urazí $100\,\mathrm{m}$? Uvažujte bodového ptáka o hmotnosti $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. *Faleš sledoval ptáky na zastávce...*

Díky náboji bude na ptáka Fykosáka působit elektrická síla $F = qE$. Tato síla bude pohyb ptáka urychlovat, protože díky zápornému náboji bude působit proti elektrické intenzitě.

Síla vykoná práci (s je dráha uražená v poli)

$$W = Fs ,$$

kterou můžeme využít pomocí zákonu zachování

$$E_\mathrm{kf} = E_\mathrm{ki} + W_\mathrm{e} .$$

Zde E_{ki} značí počáteční a E_{kf} koncovou kinetickou energii danou jako

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

Dosazením můžeme vyjádřit

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2sqE}{m}\,.$$

Odtud

$$v = \sqrt{\frac{2s \cdot 10^{12} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot E}{m} + v_0^2}\,.$$

Číselně pak máme $v \doteq 1{,}016\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Povšimněte si, že pokud hmotnost m hovořila pouze o ptákovi bez elektronů, pak jsme zanedbali jejich hmotnost, ta je ale sumárně o 20 řádů menší než hmotnost ptáka.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha E.2 ... Náryho vznášedlo

Jak velký proud by musel procházet vodičem ležícím rovnoběžně s povrchem Země o délce $1\,\mathrm{m}$*, aby se vznášel nad zemí? V místě vodiče je vektor magnetické indukce* $5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$ *rovnoběžný s povrchem Země a směřuje na sever. Vodič váží* $50\,\mathrm{g}$*. Vodič jde ze západu na východ.*

Faleš a Náry s kompasem.

Tíhová síla se musí rovnat síle magnetické, která musí působit směrem vzhůru. Pro magnetickou sílu máme

$$F_{\mathrm{m}} = BIl\sin\alpha\,,$$

kde úhel α je úhel mezi vektorem magnetické indukce a vodičem, vzhledem k uspořádání je $\alpha = \pi/2$. Z rovnice

$$BIl = mg$$

tedy můžeme už vyjádřit proud

$$I = \frac{mg}{Bl}\,.$$

Po dosazení máme $I \doteq 9{,}8\,\mathrm{kA}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha E.3 ... Náry se divil

Náry si hrál se součástkami a skončil se čtyřmi podivnými věcmi, které, jak se dozvěděl, jsou rezistor o odporu $R = 10\,000\,\Omega$*, kondenzátor o kapacitě* $C = 1\,\mu\mathrm{F}$*, cívka o indukčnosti* $L = 10\,\mathrm{H}$ *a zdroj střídavého napětí* $U = 230\,\mathrm{V}$ *s frekvencí* $f = 50\,\mathrm{Hz}$*. Všechny věci se mu nějakou náhodou povedlo spojit do sériového zapojení. Jakmile věděl, co má před sebou, hned uměl spočítat velikost (absolutní hodnotu) fázového posuvu proudu a napětí v obvodu. Kolik dostal?*

Faleš a Náry při experimentálním odpoledni.

Fázový posuv φ se nejsnáze určí pomocí fázového diagramu, kde na osu y vynášíme kladně napětí na cívce, záporně na kondenzátoru a napětí na rezistoru je pak v kladném směru osy x. Odtud dostaneme vztah

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{I\omega L - \frac{I}{\omega C}}{IR} \,.$$

Do tohoto vztahu můžeme dosadit vztah pro úhlovou frekvenci $\omega = 2\pi f$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}}{R} \,.$$

Fázový posuv je

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}}{R} \,.$$

Číselně pak $\varphi \doteq -0{,}24°$. Velikost je tedy $0{,}24°$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha E.4 ... mrzneme

Oblouková lampa má odpor $0{,}2\,\Omega$ *a je připojena na napětí* $U = 60\,\mathrm{V}$*. Jaké teplo uvolní za* $1\,\mathrm{min}$*? Výsledek udejte v* MJ. *Falešovi byla zima.*

Z Ohmova zákona velmi jednoduše spočítáme, že proud, který lampou prochází, je

$$I = \frac{U}{R} = 300\,\mathrm{A} \,.$$

Výkon, se kterým se uvolňuje Jouleovo teplo z lampy, je

$$P = UI = \frac{U^2}{R} \,.$$

Teplo se uvolňuje s výkonem $P = 18\,\mathrm{kJ{\cdot}s^{-1}}$. Celkovou energii, která se uvolní za minutu $t = 60\,\mathrm{s}$ pak dostáváme vynásobením výkonu časem

$$E = Pt = 1{,}08\,\mathrm{MJ} \,.$$

Oblouková lampa za minutu uvolní do svého okolí teplo $1{,}08\,\mathrm{MJ}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha X.1 ... Odysea a Prometheus

Dvě kosmické lodě, Odysea a Prometheus, mají obě klidovou délku L_0*. Odysea cestuje rychlostí* $0{,}25c$ *a Prometheus rychlostí* $0{,}75c$*. Obě míří k Zemi a potkávají v jednom bodě, ale v opačných směrech. Jak dlouhé se jeví navzájem v momentu průletu? Výsledek uveďte v násobcích* L_0*. Faleš koukal na Hvězdnou bránu.*

Nejprve musíme spočítat vzájemnou rychlost lodí z referenčního systému jedné z lodí. Pro výpočet budeme potřebovat relativistické skládání rychlostí:

$$v'_{\mathrm{P}} = \frac{v_{\mathrm{P}} - v_{\mathrm{O}}}{1 - \frac{v_{\mathrm{O}} v_{\mathrm{P}}}{c^2}}\,,$$

kde v_{O} je záporně vzatá rychlost Odysey (letí proti sobě) a v_{P} je rychlost Promethea. Když číselně dosadíme za rychlosti, dostaneme vzájemnou rychlost $16/19c$. Prometheus se tedy lodi Odysea jeví, jako by přilétal rychlostí $16/19c$ (a naopak).

Nyní je již snadné použít formuli pro kontrakci délek:

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{16}{19}\right)^2} = \frac{\sqrt{105}}{19} L_0 \doteq 0{,}539 L_0\,.$$

Loď se tedy jeví dlouhá jako $0{,}539L_0$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha X.2 ... kdo přežije

Mějme svazek neutronů o kinetické energii $T = 10\,\mathrm{keV}$. Střední doba života neutronu je $\tau_{\mathrm{n}} = 925\,\mathrm{s}$ a klidová energie neutronu je $m_{\mathrm{n}}c^2 = 939{,}6\,\mathrm{MeV}$. Kolik procent neutronů ve svazku se rozpadne při průletu dráhy $l = 10\,\mathrm{m}$? *Faleš koukal na Den nezávislosti.*

Kinetická energie je mnohem menší než energie klidová, a tak můžeme počítat nerelativisticky. Čas, který neutron potřebuje k průletu dráhy l je

$$t = \frac{l}{v} = \frac{l}{\sqrt{\frac{2T}{m_{\mathrm{n}}}}} = \frac{l}{c}\sqrt{\frac{m_{\mathrm{n}}c^2}{2T}}\,.$$

Tento čas je třeba dosadit do rozpadového zákona. Rozpadnutých neutronů bude

$$f_{\mathrm{D}} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_{\mathrm{n}}}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{l}{\tau_{\mathrm{n}} c}\sqrt{\frac{m_{\mathrm{n}}c^2}{2T}}} \approx \frac{l}{\tau_{\mathrm{n}} c}\sqrt{\frac{m_{\mathrm{n}}c^2}{2T}}\,.$$

Zde jsme využili rozvoj exponenciály do prvního řádu. Číselně dostáváme $7{,}8 \cdot 10^{-7}\,\%$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha X.3 ... zase ta zima

Na blok ledu o hmotnosti $m_{\mathrm{l}} = 5\,\mathrm{kg}$ a teplotě $t_{\mathrm{l}} = -2\,^{\circ}\mathrm{C}$ položíme kus železa zahřátého na $t_{\mathrm{Fe}} = 1\,333\,^{\circ}\mathrm{C}$ o hmotnosti $m_{\mathrm{Fe}} = 3\,\mathrm{kg}$. Určete výslednou teplotu soustavy. Měrná tepelná kapacita ledu je $c_{\mathrm{l}} = 2{,}1\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, skupenské teplo tání $l_{\mathrm{tl}} = 334\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ měrná tepelná kapacita vody $c_{\mathrm{v}} = 4{,}18\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, skupenské výparné teplo vody je $l_{\mathrm{vv}} = 2{,}26\,\mathrm{MJ\cdot kg^{-1}}$ a měrná tepelná kapacita železa $c_{\mathrm{Fe}} = 473\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. *Faleš viděl letos poprvé led.*

Vzájemná interakce železa a ledu bude probíhat tak, že led se nejprve od železa ohřeje na $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ a následně se začne rozpouštět (pokud je v železu uloženo dostatečné množství tepla). Začněme tedy tím, že porovnáme teplo potřebné k ohřátí ledu na 0 °C s množstvím tepla získaného ze železa při ochlazení na tuto teplotu. Toto teplo můžeme spočítat jako

$$Q = mc(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i})\,.$$

Použijeme zadané tepelné kapacity ledu a železa a číselně tedy máme tepla (v absolutní hodnotě) $Q_\mathrm{l} = 21\,\mathrm{kJ}$ a $Q_\mathrm{Fe} \doteq 1{,}89\,\mathrm{MJ}$.

Vidíme tedy, že led se ohřeje a začne tát. Spočtěme tedy, zda zbylé teplo uložené v kusu železa je dostatečné k rozpuštění celého bloku ledu. K tomu potřebné teplo spočteme jako

$$Q_\mathrm{rl} = m_\mathrm{l} l_\mathrm{tl}\,,$$

kde l_tl je měrné skupenské teplo tání ledu, jeho hodnota je $334\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$. Teplo k roztátí celého bloku tedy je $Q_\mathrm{rl} = 1{,}67\,\mathrm{MJ}$. Blok tedy celý roztaje a led se začne ohřívat. Pro toto ohřívání máme konečně rovnici

$$m_\mathrm{Fe} c_\mathrm{Fe}(t_\mathrm{Fe} - t) = Q_\mathrm{l} + Q_\mathrm{rl} + m_\mathrm{l} c_\mathrm{v} t\,,$$

kde $c_\mathrm{v} = 4{,}18\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ je měrná tepelná kapacita vody. Odtud najdeme hledanou teplotu

$$t = \frac{m_\mathrm{Fe} c_\mathrm{Fe} t_\mathrm{Fe} - (Q_\mathrm{l} + Q_\mathrm{rl})}{m_\mathrm{l} c_\mathrm{v} + m_\mathrm{Fe} c_\mathrm{Fe}} = \frac{m_\mathrm{Fe} c_\mathrm{Fe} t_\mathrm{Fe} - m_\mathrm{l} c_\mathrm{l}\,(t_0 - t_\mathrm{l}) - m_\mathrm{l} l_\mathrm{tl}}{m_\mathrm{l} c_\mathrm{v} + m_\mathrm{Fe} c_\mathrm{Fe}}\,.$$

Číselně pak vychází $t \doteq 9{,}0\,^\circ\mathrm{C}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha X.4 ... pokrývač

Může být rovina pokryta tak, že se v každém vrcholu pokrytí stýká t rovnostranných trojúhelníků, c čtverců a s pravidelných šestiúhelníků? Napište, kolik takových možností existuje (pouze tzv. pokrytí „hrana k hraně“). Čísla t, c, s jsou celá nezáporná. Velikosti útvarů jednoho typu jsou v rámci jednoho pokrytí stejné. Na uspořádání útvarů okolo vrcholu nezáleží.

Mirek se začetl.

Pro každé takové pokrytí musí platit

$$\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}c + \frac{2\pi}{3}s = 2\pi\,,$$

neboli

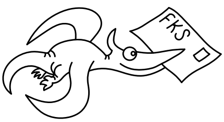
$$2t + 3c + 4s = 12\,.$$

Vidíme, že

$$t \leq 6\,, s \leq 4\,, h \leq 3\,.$$

Lze nalézt 7 vyhovujících kombinací (t, c, s): $(0, 0, 3)$, $(0, 4, 0)$, $(6, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 0, 2)$, $(3, 2, 0)$, $(4, 0, 1)$. Samozřejmě pro jednu trojici lze nalézt více uspořádání útvarů okolo vrcholu (zkuste si to pro $(1, 2, 1)$), nicméně zadání se ptalo na počet pokrytí nezávisle na uspořádání, takže výsledek je skutečně 7.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.