Řešení úloh Fyziklání Online 2022

Úloha 1 ... ujíždí mi ruka

3 body

Podle informací z Wikipedie jsou nejdelší eskalátory v Praze na Náměstí Míru. Urazí zde $l = 87{,}1\,\mathrm{m}$ za $t = 140\,\mathrm{s}$. Také se říká, že kvůli pozornosti se pohybují madla o $\delta v = 2{,}0\,\%$ rychleji než schody. O kolik se vám posune ruka o proti zbytku těla v momentě, kdy ruka dojede na konec eskalátorů (kdybyste ji měli dost dlouhou), pokud se budete celou dobu držet madla a při tom stát na stejném schodě? *Karel se znovu zamýšlel nad eskalátory.*

Madla se pohybují rychlostí

$$u = v \cdot (1 + \delta v)\,,$$

proto se ruka dostane na konec eskalátorů za čas

$$\tau = \frac{l}{u} = \frac{l}{v} \cdot \frac{1}{1 + \delta v}\,.$$

Zbytek těla se mezitím urazí vzdálenost

$$l_0 = v \cdot \tau = l_0 \cdot \frac{1}{1 + \delta v}\,,$$

z čehož zjistíme, že se ruka o proti zbytku těla posunula o

$$\Delta l = l - l_0 = \frac{\delta v}{1 + \delta v} \cdot l\,,$$
$$\Delta l = 1{,}71\,\mathrm{m}\,.$$

Ruka by vám popojela o 1,71 m oproti nohám. Proto není u většiny lidí reálné, aby se vydrželi držet celou dobu na jednom místě. Je otázkou, jak přesně jsou nastavené které eskalátory. Ale to, že se musíte občas přechytit (a děláte to nejspíše i podvědomě), není obvykle chybou eskalátorů, jedná se naopak o chtěný prvek.

Jiří Kohl
`jiri.kohl@fykos.cz`

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha 2 ... porovnání praků

3 body

Lega už omrzely luky, tak si šel koupit prak. Ten aproximujeme jako pružinku s konstantní tuhostí a nulovou klidovou délkou. Legolas umí natáhnout prak silou $F = 31{,}4\,\mathrm{N}$ a chce, aby při takovém natažení uložil do praku co největší energii. V obchodě byly 2 praky s tuhostmi $k_1 = 159\,\mathrm{N/m}$ a $k_2 = 265\,\mathrm{N/m}$. Jaký bude rozdíl potenciálních energií uložených do těchto praků při natažení silou F? Uveďte kladný výsledek, pokud má více energie prak s k_1, a záporný, pokud naopak. *Lega už omrzely luky.*

Potenciálna energia pružinky je daná vzťahom $E_p = \frac{1}{2}ky^2$, kde k je tuhosť pružinky a y jej predĺženie. Ak natiahneme pružinku tuhosti k_1 silou F, jej dĺžka sa zväčší o $y_1 = \frac{F}{k_1}$. Potom pre potenciálnu energiu prvej pružinky dostávame

$$E_{p1} = \frac{1}{2}k_1 y_1^2 = \frac{F^2}{2k_1}\,.$$

Analogicky vyjadríme aj potenciálnu energiu druhej pružinky pri rovnakom natiahnutí. Napokon spočítame rozdiel týchto dvoch energií a dostávame

$$E_{p1} - E_{p2} = \frac{F^2}{2}\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) = 1{,}24\,\mathrm{J}\,,$$

čo je hľadaný výsledok.

Vidíme, že keď fixujeme silu, ktorou pružinku naťahujeme, väčšiu prácu vykonáme v prípade, keď má pružinka menšiu tuhosť. Prečo sa potom nevyrábajú všetky praky a luky s čo najmenšou tuhosťou? Najstručnejšia odpoveď je, že okrem maximálnej sily sú naše ruky obmedzované aj maximálnou vzdialenosťou, o akú môžu byť od seba vzdialené. (Zložitejšia odpoveď by zahŕňala to, že sila, ktorou môžeme pôsobiť, nie je nezávislá na vzájomnej polohe našich rúk...)

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 3 ... horská cyklistika — 3 body

Matěj jede po horské cyklostezce a míjí protijedoucí cyklisty. Na vršku kopce se vyčerpaní jezdci pohybují průměrnou rychlostí $5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ v obou směrech a Matěj jich zde potkává v průměru 0,02 za sekundu. Naopak v nejnižším bodě stezky jsou cyklisti rozjetí (z obou směrů) a ženou se průměrnou rychlostí $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Kolik jich Matěj v průměru potkává zde? Cyklostezka nemá žádné odbočky a Matěj se vždy pohybuje rychlostí průměrného cyklisty.

Matěj horsky cyklistoval.

Úloha je triková a má triviální řešení. Předpokládáme-li, že se nikdo nevyboural, tak kvůli zachování počtu cyklistů musí každým bodem cyklostezky projet stejný počet jezdců za sekundu. Díky tomu, že se Matěj pohybuje stejně velkou rychlostí jako protijedoucí cyklisti, je tak počet jezdců potkaných za sekundu dvojnásobný (vůči statickému pozorovateli), ale pořád zůstává konstantní. Řešením je tedy 0,02 cyklistů za sekundu.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha 4 ... myslivče, střel se — 3 body

Jaký největší poloměr může mít planetka, aby na ní člověk mohl sám sebe střelit? Myslivec vystřelí těsně nad jejím povrchem, rovnoběžně s ním a planetka nebude mít atmosféru. Rychlost letící kulky je $v = 380\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Hustota planetky je $\rho = 3\,200\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Uvažujte, že planetka je kulová a homogenní.

Karel chtěl planetární střílení.

Zadání úlohy se nás v podstatě ptá, jaký poloměr musí planetka mít, aby se kulka pohybovala po kruhové dráze těsně nad jejím povrchem (s větší rychlostí by se pohybovala po eliptické dráze). Označíme-li m hmotnost kulky, M hmotnost planetky a R její poloměr, zajímá nás rovnost sil

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}\,,$$

kde hmotnost M můžeme dále vyjádřit jako

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\,.$$

Dosazením a úpravami dostaneme

$$R = v\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} \doteq 402\,\mathrm{km}\,.$$

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Úloha 5 ... padající rampouchy 3 body

Z okraje střechy se uvolnil malý ledový rampouch a volným pádem se pohyboval podél svislé zdi domu. Kolem okna vysokého $h = 1{,}50\,\mathrm{m}$ proletěl rampouch za dobu $t = 0{,}10\,\mathrm{s}$. Jaká je vzdálenost mezi okrajem střechy a vrškem okna? *Kubu tehdy málem zasáhnul rampouch.*

Vieme, že okno má výšku h a že cencúľ (áno, to je rampouch po slovensky) okolo neho padal počas doby t, čiže za čas t prešiel dráhu h. Zrejme už pri hornom okraji okna mal cencúľ nejakú nenulovú rýchlosť. Použijeme preto vzorec pre dráhu rovnomerne zrýchleného priamočiareho pohybu s nenulovou počiatočnou rýchlosťou

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Jediná veličina v tomto vzťahu, ktorú nepoznáme, je rýchlosť pri hornom okraji okna v_0. Môžeme si ju preto vyjadriť ako

$$v_0 = \frac{h - \frac{1}{2} g t^2}{t}\,.$$

Nakoniec zostáva uvedomiť si, že ak cencúľ padal voľným pádom z pokoja, tak rýchlosť v_0 získal za čas $t_0 = v_0/g$. Teda od momentu, kedy začal padať, po moment, kedy bol pri hornej hrane okna, spadol o

$$h_0 = \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{\left(h - \frac{1}{2} g t^2\right)^2}{2 g t^2} \doteq 10{,}7\,\mathrm{m}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 6 ... ojetá pneumatika 3 body

Pneumatiky našeho nového vozu mají průměr $D = 634{,}5\,\mathrm{mm}$ a hloubku dezénu $d_0 = 8{,}0\,\mathrm{mm}$. Technik nám nastavil tachometr auta tak, že měřil přesně pro původní rozměr kola. Řídíme však často, takže se dezén pneumatik po čase sjel na minimální hloubku pro použití v létě, tedy $d_{\mathrm{min}} = 1{,}6\,\mathrm{mm}$. Jak se nyní odlišuje skutečná rychlost od té, které ukazuje tachometr? Odpověď udejte jako podíl rychlosti na tachometru k reálné hodnotě. *Karel tankoval.*

Kolo považujeme za dokonale kruhové, pak je jeho obvod $o_0 = \pi D$. Poté, co se nám sjede vzorek, se dostáváme na průměr $D_1 = D - 2(d_0 + d_{\mathrm{min}})$ a nový obvod kola bude $o_1 = \pi\left(D - 2d_0 + 2d_{\mathrm{min}}\right)$. Když auto urazí obvod nového kola, tak si „tachometr myslí“, že ujelo o něco více, tedy délku původního obvodu. Poměr rychlostí, který ukazuje tachometr bude odpovídat poměru obvodů, tedy

$$k = \frac{o_0}{o_1} = \frac{\pi D}{\pi\left(D - 2d_0 + 2d_{\mathrm{min}}\right)} = \frac{D}{D - 2d_0 + 2d_{\mathrm{min}}} \doteq 1{,}02\,.$$

Tachometr pak ukazuje $102\,\%$ skutečné hodnoty rychlosti.

Ve skutečnosti by měl být tachometr vždy nastavený tak, aby ukazoval o něco více, než je skutečná rychlost, a to i v případě nesjetého dezénu. Skutečná situace se komplikuje i tím, že se pneumatiky v průběhu pohybu deformují, nejezdíme jenom po roviné silnici apod. Nicméně tyto vlivy jsou už relativně malé.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha 7 ... vyhoď tu bombu 3 body

Na konci filmu Simpsonovi ve filmu jedou Homer s Bartem na motorce po vnitřní ploše skleněné kupole. Předpokládejte, že kupole má poloměr $1{,}00\,\mathrm{km}$. Jakou minimální rychlostí by musela motorka jet, aby ani v nejvyšším bodě kupole Homer s Bartem nespadli?

Jindra zkoušel svou novou motorku na Ondřejovské hvězdárně.

Budeme pracovat v neinerciální soustavě spojené s motorkou. Na vrcholku kupole působí na motorku dvě síly, tíhová síla směrem dolů a odstředivá síla nahoru. Hraniční případ nastane ve chvíli, kdy si obě síly budou rovné

$$mg = \frac{mv^2}{r}\,.$$

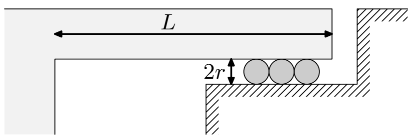
Poloměr koule jsme si označili $r = 1{,}00\,\mathrm{km}$, m je hmotnost motorky s jezdci, $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je tíhové zrychlení a v je hledaná minimální rychlost motorky. Vyjádříme

$$v = \sqrt{gr} = 99{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 357\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Homer s Bartem by museli jet rychlostí $357\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha 8 ... jezdící most 3 body



Silniční most mající délku $L = 8\,\mathrm{m}$ je na jedné straně pevně ukotven. Na druhé je položen na pevnýchválečcích o poloměru $r = 6\,\mathrm{cm}$. Ty leží na pevné rovné podložce, po které se mohou volně pohybovat ve vodorovném směru. O jaký úhel se válečky pootočí mezi zimou, kdy je $t_{\mathrm{z}} = -10\,{}^\circ\mathrm{C}$, a létem s teplotou $t_{\mathrm{l}} = 30\,{}^\circ\mathrm{C}$? Koeficient délkové tepelné roztažnosti mostu je $\alpha = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$. Válečky neprokluzují a na volné straně je mezi koncem mostu a silnicí mezera.

Jarda cítí, jak se mu hýbe půda pod nohama.

Délka mostu se změní o $\Delta l = l\alpha\Delta T$, kde l je jeho původní délka, α je koeficient délkové teplotní roztažnosti a $\Delta T = 40\,^\circ\mathrm{C}$ je rozdíl teplot mezi zimou a létem.

Neupevněný konec mostu se tedy posune o $\Delta l = 3{,}2\,\mathrm{mm}$. S tím, jak se posouvá konec mostu, se mění i polohaválečků. Protože válečky neprokluzují, jsou vzdálenosti na rovných i zakřivených površích stejné. Váleček se posune o polovinu vzdálenosti ve srování s koncem mostu, protože neprokluzuje dole ani nahoře - střed válečku se pohybuje určitou rychlostí vpřed, ale jeho horní bod se pohybuje o násobek úhlové rychlosti a poloměru kolečka rychleji.

Úhel ve stupních tak spočítáme jako

$$\varphi = \frac{l\alpha\Delta T}{2}\frac{360\,^\circ}{2\pi r} = 1{,}5^\circ\,,$$

kde r je poloměr válečku.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 9 ... dva kvádry na kopci 4 body

Mějme „kopec" skládající se ze dvou nakloněných rovin, jejichž sklon vůči vodorovné rovině označíme α_1 a α_2. Na první rovinu se sklonem $\alpha_1 = 25^\circ$ položíme kvádr o hmotnosti $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$ a na druhou se sklonem $\alpha_2 = 35^\circ$ položíme odlišný kvádr s hmotností $m_2 = 15\,\mathrm{kg}$. Následně oba kvádry propojíme nehmotným lanem vedeným přes nehmotnou kladku na vrcholu kopce. Lano je vždy rovnoběžně napnuté vůči dané rovině, koeficient smykového tření mezi kvádry a nakloněnými rovinami je $f = 0{,}15$ a koeficient statického tření je dostatečně malý na to, aby se rozjeli. Jaké bude zrychlení kvádru m_1, pokud na počátku jsou oba kvádry v klidu? Kladné znaménko bude značit zrychlení dolů z kopce a záporné nahoru k vrcholu. *Lego byl na túře.*

Pozorný riešiteľ si ihneď všimne, že kváder m_2 je ťažší a navyše sa nachádza na naklonenej rovine s väčším sklonom, čiže intuitívne to bude kváder m_2, ktorý bude zrýchľovať smerom dole a kváder m_1 bude zrýchľovať smerom hole. To si aj overíme výpočtom. Dôležité ale je uvedomiť si, že ak by sme počítali s predpokladom, že kváder m_1 zrýchľuje dole, dostali by sme záporné zrýchlenie. Toto zrýchlenie však nie je naším riešením, lebo bolo spočítané s predpokladom, že kvádre sa hýbu s opačným zrýchlením, než sa hýbu v skutočnosti, a teda trecie sily majú opačnú orientáciu (tento nesprávny výsledok je teda v absolútnej hodnote väčší než ten správny).

Dosť rozprávania o tom, ako sa tento príklad nerieši, poďme sa pozrieť ako sa rieši. Kváder m_2 ťahá nadol zložka jeho tiaže rovnobežná s naklonenou rovinou, jej veľkosť teda bude $F_{\mathrm{k}2} = m_2 g \sin\alpha_2$. Brzdiť ho bude trecia sila úmerná zložke jeho tiaže kolmej na podstavu kvádra, čiže s veľkosťou $F_{\mathrm{t}2} = f m_2 g \cos\alpha_2$. Navyše ho nahor bude ťahať lano silou, ktorú nepoznáme, takže si ju označíme T. Pohybová rovnica pre tento kváder bude $m_2 a_2 = F_{\mathrm{k}2} - F_{\mathrm{t}2} - T$. Obdobne budú vyzerať sily pre kváder 1, akurát že ten bude ťahať v smere jeho zrýchlenia (teda nahor) lano, zatiaľ čo jeho tiaž ho bude ťahať dole, čiže proti smeru jeho zrýchlenia. Pohybová rovnica preň teda bude $m_1 a_1 = -F_{\mathrm{k}1} - F_{\mathrm{t}1} + T$.

Keďže lano a kladka sú nehmotné, ťahá lano oba kvádre rovnako veľkou silou T. Zároveň zrýchlenie kvádrov musí byť rovnako veľké, čiže v našich rovniciach platí $a_1 = a_2$. Zostáva rovnice sčítať, aby sme sa zbavili neznámej T a vyjadriť a_2:

$$(m_2 + m_1)a_2 = F_{k2} - F_{t2} - F_{k1} - F_{t1} \,,$$

$$a_2 = g\frac{m_2 \sin\alpha_2 - f m_2 \cos\alpha_2 - m_1 \sin\alpha_1 - f m_1 \cos\alpha_1}{m_2 + m_1} \,,$$

$$a_2 = 0{,}46\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \,.$$

Pripomeňme si, že zadanie požadovalo zrýchlenie so záporným znamienkom, ak kváder m_1 zrýchľuje smerom nahor, čiže správnou odpoveďou je $-0{,}46\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha 10 ... energetická rychlovarná úspora — 4 body

Když ceny rostou, je třeba šetřit. Jaká bude naše úspora v procentech, pokud budeme na čaj ohřívat méně vody a úsporněji? Původní způsob spočíval v ohřátí $V_1 = 1{,}00\,\mathrm{l}$ vody z původní teploty $t_0 = 18{,}5\,\mathrm{^\circ C}$ (konvice i vody) na teplotu varu $t_\mathrm{v} = 98{,}5\,\mathrm{^\circ C}$. Používáme rychlovarnou konvici s tepelnou kapacitou $C = 442\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$. Nový způsob se bude lišit menším objemem ohřívané vody $V_2 = 0{,}800\,\mathrm{l}$ a nižší dosaženou teplotou $t_2 = 83\,\mathrm{^\circ C}$. Cenu elektřiny pro spotřebitele uvažujte bez ohledu na aktuální vývoj cen jako konstantní $p = 4{,}45\,\mathrm{Kč{\cdot}kWh^{-1}}$. Předpokládejte, že teplota vody je vždy stejná v celém objemu a účinnost konvice je $95\,\%$.

Karel se díval na rostoucí inflaci.

Jde o relativně přímočarou aplikaci kalorimetrické rovnice, která je zkomplikována tím, že srovnáváme dvě situace a ještě je musíme na závěr dát do poměru. Uvedená cena je v zadání navíc. Otázka je totiž na procentní úsporu, která nezávisí na ceně elektřiny, pokud je konstantní. Nicméně pokud bychom ohřívali prvním způsobem před zdražením a druhým až po zdražení, tak bychom potřebovali znát aktuální ceny. Stejně tak je v zadání navíc účinnost, která změní pouze absolutní hodnoty energie/tepla, ale relativní úspora zůstane stejná.

Teplo, které je přijato v prvním případě, je součtem tepla přijatého vodou a konvicí. Celkově tedy

$$Q_1 = m_1 c \Delta t_1 + C \Delta t_1 = (\rho V_1 c + C)(t_\mathrm{v} - t_0) \,,$$

kde $m_1 = \rho V_1$ je hmotnost vody, ρ je hustota vody, c je měrná tepelná kapacita vody. Předpokládáme, že materiálové konstanty vody jsou dostatečně přesně konstantní pro daný teplotní interval. Podobně můžeme napsat vztah pro úspornější teplo

$$Q_2 = m_2 c \Delta t_2 + C \Delta t_2 = (\rho V_2 c + C)(t_2 - t_0) \,,$$

kde jsou veličiny označeny analogicky.

Chceme srovnat procentní úsporu s původní spotřebou. Poměr úspory označme jako k. Jak jsme již zmiňovali, tak je v našem případě stejný jako poměr tepel

$$k = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\rho V_2 c + C}{\rho V_1 c + C} \cdot \frac{t_2 - t_0}{t_\mathrm{v} - t_0} \doteq 34{,}0\,\%$$

Z výsledného tvaru vidíme, že pokud by nám stačil výsledek se zanedbanou tepelnou kapacitou rychlovarné konvice, tak kromě ceny elektřiny a účinnosti bychom nemuseli znát ani hustotu vody a měrnou tepelnou kapacitu vody. V tomto případě by nám ale vyšlo $35{,}5\,\%$. Což se již znatelně liší v rámci zadaného počtu platných cifer, takže výsledek se zanedbanou tepelnou kapacitou konvice jsme neuznávali. Mimochodem, ušetříme 0,15 Kč na jedno ohřátí vody.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha 11 ... indukované napětí reloaded 3 body

Mějme oblast homogenního magnetického pole. Oblast má obdélníkový průřez se stranami $a = 3{,}0\,\mathrm{m}$, $b = 2{,}0\,\mathrm{m}$ a vektor magnetické indukce $B = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ je na ni kolmý. Rovnoběžně s úhlopříčkou obdélníku vedeme dostatečně dlouhý drát tak, že leží celý mimo oblast s magnetickým polem. Tyto konce propojíme voltmetrem.

Nyní začneme drátem pohybovat rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí $v = 0{,}20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ kolmo na směr magnetické indukce a na úhlopříčku, s níž je rovnoběžný. Jakou nejvyšší velikost napětí bude ukazovat voltmetr během pohybu drátu? *Vojta dělal korektury úloh.*

Napětí indukované na vodiči délky l pohybujícím se rychlostí v kolmo na magnetické pole o indukci B dostaneme jako

$$U = Bvl\,.$$

Protože nás zajímá nejvyšší hodnota napětí, musí být délka části vodiče v mag. poli maximální, neboť všechny ostatní parametry jsou konstantní. Ta může nejvýše nabývat hodnoty $\sqrt{a^2+b^2}$, dostáváme tedy

$$U_{\max} = Bv\sqrt{a^2+b^2} \doteq 0{,}72\,\mathrm{mV}\,.$$

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 12 ... Archimedeskugeln 5 bodů

Mějme dvě identické nádoby s hmotností $M_\mathrm{n} = 340{,}0\,\mathrm{g}$ se stejným množstvím vody o hmotnosti $M_\mathrm{w} = 150{,}0\,\mathrm{g}$. Obě nádoby postupně postavíme na váhy. Do první z nich ponoříme ocelovou kuličku s hustotou $\rho_\mathrm{o} = 7\,850\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, jež je zavěšená na externí konstrukci, která nestojí na váze. Kulička je plně ponořená a nedotýká se dna. Ve druhé nádobě připevníme ke dnu provázkem polystyrenovou kuličku s hustotou $\rho_\mathrm{p} = 27{,}0\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a poloměrem $r_\mathrm{p} = 1{,}5\,\mathrm{cm}$. Kulička je plně ponořená, neprotíná hladinu. Jaký musí být poloměr ocelové kuličky, aby obě váhy ukázaly stejnou hmotnost? *Jindra se učil německy, aby skryl koule do názvu.*

V prvním případě působí na ocelovou kuličku o objemu V_o tíhová síla $\rho_\mathrm{o} V_\mathrm{o} g$ směrem dolů. Směrem nahoru působí vztlaková síla vody $\rho_\mathrm{w} V_\mathrm{o} g$ a tahová síla provázku T_o.

Na vodu v nádobě působí reakční síla na vztlakovou sílu od kuličky $\rho_\mathrm{w} V_\mathrm{o} g$ směrem dolů. Tím pádem první nádoba tlačí na váhu celkovou silou $M_\mathrm{n} g + M_\mathrm{w} g + \rho_\mathrm{w} V_\mathrm{o} g$, kde první dva členy vyjadřují tíhovou sílu nádoby a vody.

Ve druhém případě působí na polystyrenovou kuličku o objemu V_p směrem nahoru vztlaková síla vody $\rho_\mathrm{w} V_\mathrm{p} g$. Směrem dolů tíhová síla $\rho_\mathrm{p} V_\mathrm{p} g$. Z rovnováhy na této kuličce určíme tahovou síla provázku jako

$$T_\mathrm{p} = (\rho_\mathrm{w} - \rho_\mathrm{p})\, V_\mathrm{p} g\,,$$

která působí na kuličku směrem dolů.

Na vodu v nádobě působí reakční síla od kuličky $\rho_\mathrm{w} V_\mathrm{P} g$ směrem dolů. Taktéž ale lanko tahá za dno silou T_p směrem nahoru, čímž nádobu nadlehčuje. Celková síla působící na váhu je proto

$$M_\mathrm{n} g + M_\mathrm{w} g + \rho_\mathrm{w} V_\mathrm{P} g - (\rho_\mathrm{w} - \rho_\mathrm{p}) V_\mathrm{P} g = M_\mathrm{n} g + M_\mathrm{w} g + \rho_\mathrm{p} V_\mathrm{P} g \,.$$

Jednodušeji bychom mohli stejný výsledek odvodit, pokud si uvědomíme, že nádoba, voda a polystyrenová kulička tvoří jeden systém s hmotností $M_\mathrm{n} + M_\mathrm{w} + \rho_\mathrm{p} V_\mathrm{p}$, na nějž působí tíhová síla $(M_\mathrm{n} + M_\mathrm{w} + \rho_\mathrm{p} V_\mathrm{p})\, g$.

Obě váhy ukážou stejnou hodnotu, pokud $\rho_\mathrm{w} V_\mathrm{o} = \rho_\mathrm{p} V_\mathrm{p}$ (hmotnosti vody a nádoby se odečtou), odkud dostaneme

$$r_\mathrm{o} = r_\mathrm{p} \sqrt[3]{\frac{\rho_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{w}}} = 0{,}45\,\mathrm{cm}\,.$$

Zajímavé je, že poloměr nezávisí na hustotě oceli.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 13 ... zanedbáme pohyb Země — 4 body

Zamýšleli jste se někdy nad tím, že zanedbáváme pohyb Země k tělesu, které volně nad ní upustíme? Tento výpočet zodpovídá Zemi o nekonečné hmotnosti. Dalo by se však alespoň teoreticky pohyb Země změřit? Dle současné fyziky obecně nedokážeme měřit vzdálenosti menší než Planckova délka, která je $l_\mathrm{P} = \sqrt{\hbar G/c^3} \doteq 1{,}616 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}$. Jakou minimální hmotnost by muselo mít těleso, aby se mezi jeho upuštěním a dopadem pohnula Země alespoň o $n = 10^4$ Planckových délek vůči své původní poloze? Těleso bylo před pádem ve výšce $h = 1{,}00\,\mathrm{m}$ nad povrchem. Neuvažujte rotaci Země, atmosféru a jakýkoli její jiný pohyb.

Karel se zamýšlel nad zanedbáními a Planckovými jednotkami.

Řešení pomocí volného pádu

Pro jednoduchost předpokládejme, že jde o volný pád. Za nějakou dobu se pohne těleso o h a přitom se Země pohne o nl_P. Respektive bychom mohli uvažovat, že se těleso pohne o tolik méně, co se pohne Země, ale je to tak neuvěřitelně malý rozdíl, že ho můžeme zanedbat.

Protože jde o pohyb s konstantním zrychlením začínající v naší soustavě v klidu, platí

$$h = \frac{1}{2} a\ t^2\,, \quad s_\oplus = \frac{1}{2} a_\oplus t^2\,,$$

kde a je zrychlení tělesa, t je doba pádu, $s_\oplus$ posun Země a $a_\oplus$ zrychlení Země. Obě zrychlení jsou gravitační a platí

$$a = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}\,, \quad a_\oplus = \frac{Gm}{R_\oplus^2}\,,$$

kde $R_\oplus$ je poloměr Země, přičemž opět můžeme vůči němu zanedbat h i nl_P a považovat zrychlení v průběhu pádu za konstantní.

Časy pádu se rovnají, takže

$$\frac{2h}{a} = \frac{2s_\oplus}{a_\oplus} \quad \Rightarrow \quad s_\oplus = \frac{a_\oplus}{a} h = \frac{m}{M_\oplus} h\,.$$

Chceme, aby posun byl větší než nl_P, takže

$$s_\oplus > nl_\mathrm{P} \quad \Rightarrow \quad nl_\mathrm{P} < \frac{m}{M_\oplus} h \quad \Rightarrow \quad m > nl_\mathrm{P} \frac{M_\oplus}{h} \doteq 9{,}65 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg} = 0{,}965\,\mathrm{mg}\,.$$

Hmotnost tělesa by musela být větší než 0,965 mg.

Riešenie v ťažiskovej sústave

Kedže podľa zadania ide o izolovanú sústavu Zeme a telesa (neuvažujeme iné pohyby Zeme), ich spoločné ťažisko sa podľa 1. Newtonovho zákona pohybuje rovnomerne priamočiaro. Ak sa na problém budeme pozerať z tejto sústavy, ťažisko sa pri pohybe telies nehýbe. Ak označíme vzdialenosť stredu Zeme od ťažiska $d_\oplus$ a vzdialenosť telesa od ťažiska d, platí známy vzťah

$$d_\oplus M_\oplus = dm\,, \tag{1}$$

kde $M_\oplus$ je hmotnosť Zeme. Pre výšku nad povrchom Zeme máme vzťah $h + R_\oplus = d_\oplus + d$, kde $R_\oplus$ je polomer Zeme.[1] Vzťah pre polohu ťažiska 1 platí vždy, teda aj počas pádu a po dopade telesa na povrch Zeme. Po dopade sa teda vzdialenosti zmenia na nové $d'_\oplus$ a d', pre ktoré platí $R_\oplus = d'_\oplus + d'$ a $d'_\oplus M_\oplus = d'm$. Nás zaujímajú posunutia, nie samotné vzdialenosti. Odčítajme preto príslušné rovnice od seba

$$\Delta d_\oplus M_\oplus = \Delta dm\,, \qquad h = \Delta d_\oplus + \Delta d\,.$$

Riešením tejto sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi dostávame výsledný vzťah

$$\Delta d_\oplus = \frac{mh}{m + M_\oplus} \approx \frac{mh}{M_\oplus}\,.$$

Hľadáme najmenšie m, aby bola $\Delta d_\oplus > nl_\mathrm{P}$

$$m > \frac{M_\oplus nl_\mathrm{P}}{h} \doteq 9{,}65 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg} = 0{,}965\,\mathrm{mg}\,.$$

Dostávame teda, že hmotnosť telesa by musela byť väčšia ako približne jeden miligram.

Na záver poznamenajme, že dokonca ani 10^4 Planckových dĺžok nie je vzdialenosť, ktorú by sme pri niečom o rozmeroch Zeme vedeli podľa súčasnej experimentálnej fyziky zmerať, takže úloha je skôr len teoretickou hračkou. Ďalšou alternatívou riešenia môže byť výpočet použitím zákona zachovania hybnosti.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

[1] V skutočnosti by tu mala vystupovať vzdialenosť od stredu Zeme k povrchu. Ďalej v riešení ticho predpokladáme, že teleso bude padať pozdĺž spojnice jeho počiatočnej polohy a stredu Zeme, čo je však pre skutočnú nesférickú Zem a našu úlohu dobrá aproximácia.

Úloha 14 ... horká žárovka

4 body

Danka má na stole lampu, ve které je stará žárovka s příkonem $P = 60\,\mathrm{W}$. Ve vzdálenosti $h = 40\,\mathrm{cm}$ pod žárovkou leží na stole počítačová myš s průřezem tvaru elipsy s hlavní poloosou délky $a = 60\,\mathrm{mm}$ a vedlejší poloosou délky $b = 30\,\mathrm{mm}$. Při rozsvícení žárovky má myš pokojovou teplotu $T_1 = 23{,}0\,\mathrm{°C}$. Jakou bude mít myš teplotu po 90 minutách svícení? Předpokládejte, že žárovka svítí izotropně do celého prostoru, $\eta = 83\,\%$ energie dopadající na průřez myši ji ohřeje a zároveň sama myš neztrácí teplo. Tepelná kapacita myši je $C = 200\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$.

Dance se od lampy zahřívá myš.

Z kalorimetrickej rovnice vieme, že teplo Q prijaté myšou je rovné

$$Q = C(T_2 - T_1)\,,$$

kde T_2 je teplota myši po 90 minútach svietenia. To je rovné teplu, ktoré prijme od žiarovky. Žiarovka má tepelný výkon rovný $P\eta$, ktorý sa rozdelí rovnomerne do celého priestoru. Vo vzdialenosti h je potom tepelný výkon žiarovky na jednotku plochy rovný $\frac{P\eta}{4\pi h^2}$. Keď túto veličinu vynásobíme plochou, ktorú zaberá prierez myši, a časom t, dostaneme celkové teplo, ktoré je myši predané. Keďže myš má nenulové rozmery, keď sa jej stred nachádza vo vzdialenosti h od žiarovky, jej okraje sú v trochu väčšej vzdialenosti. Avšak môžeme si spočítať, že uhol, pod ktorým je vidieť najdlhší rozmer myši (pri pohľade od žiarovky) je približne $15\,°$. Z toho môžeme zrátať, že rozdiel vzdialeností okraju a stredu myši od žiarovky je zanedbateľný. Potom môžeme uvažovať, že na celú plochu myši dopadá rovnaký energetický tok. Prierez myši je vlastne plocha elipsy, teda πab. Z týchto úvah dostávame rovnicu pre rovnosť vyžiareného a prijatého tepla

$$\frac{P\eta t}{4\pi h^2}\pi ab = C(T_2 - T_1)\,.$$

Upravíme a vyjadríme hľadanú teplotu T_2

$$T_2 = T_1 + \frac{P\eta tab}{4Ch^2}\,.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame $T_2 \doteq 27\,\mathrm{°C}$.

Daniela Dupkalová
`daniela@fykos.cz`

Úloha 15 ... korálek s pružinkou

4 body

Korálek o hmotnosti $m = 358\,\mathrm{g}$ jsme navlékli na rovný drát (korálek se může tedy pohybovat pouze v jednom směru). Připojíme ke korálku ideální pružinku s nulovou klidovou délkou a tuhostí $k = 979\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Druhý konec této pružinky upevníme ve vzdálenosti $l = 323\,\mathrm{mm}$ od přímky, na které leží drát. Jaká bude perioda malých kmitů korálku okolo jeho rovnovážné polohy?

Lego dlouho nezadal úlohu na malé kmity.

Samozrejme by sme mohli úlohu vyriešiť tak, že spočítame, aká sila bude na korálku pôsobiť po vychýlení o malé Δx, rýchlejšie a elegantnejšie je však spočítať, ako narastie jej potenciálna energia po takomto vychýlení.

Potenciálna energia pružinky s nulovou pokojovou dĺžkou je rovná

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}ky^2\,,$$

kde y je jej dĺžka. Rovnovážna poloha korálky je prirodzene v bode drôtu, v ktorom je najbližšie k bodu uchytenia pružiny (lebo vtedy je pružinka najkratšia). Zo zadania vieme, že bod uchytenia je od drôtu vzdialený l, takže v rovnovážnej polohe má pružinka smer kolmý na drôt a dĺžku rovnú l.

Keď korálku z rovnovážnej polohy vychýlime o Δx, posunieme ju o túto vzdialenosť kolmo na rovnovážny smer pružinky. Nová poloha pružinky teda bude preponou pravouhlého trojuholníka, kde odvesny tvoria rovnovážna poloha pružinky l a vychýlenie korálky Δx. Potom môžeme z Pytagorovej vety spočítať priamo druhú mocninu novej dĺžky pružiny ako $l^2+\Delta x^2$. Potenciálna energia pružiny teda bude

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k\left(l^2 + \Delta x^2\right) .$$

Nesmieme ale zabúdať, že potenciálna energia pružiny v rovnovážnej polohe bola $kl^2/2$, čiže vychýlením korálky o Δx narástla potenciálna energia o $k\Delta x^2/2$. Teraz si buď môžeme rovno všimnúť, že to zodpovedá lineárnemu harmonickému oscilátoru s tuhosťou k, alebo môžeme potenciálnu energiu zderivovať podľa polohy a dostaneme, že sila, ktorá pôsobí proti vychýleniu o Δx je $k\Delta x$. Tak ako tak, zostáva to dosadiť do vzorca pre periódu lineárneho harmonického oscilátora

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \doteq 0{,}120\,\mathrm{s} .$$

Zaujímavé je, že korálka kmitá s touto periódou nezávisle na veľkosti jej počiatočnej výchylky na drôte, nemusíme sa teda obmedzovať iba na malé kmity.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha 16 ... balada o hříšné duši — 5 bodů

Jardova FYKOSí duše se jednou zbaví svého fyzického břemene a zamíří do nebe za ptákem Fykosákem. Obtěžkána hříchy však sklouzne do pekla, kde bude uzavřena v kotli o objemu $V = 666\,\mathrm{cm^3}$*, v němž zůstane uchována za drastických podmínek* $T = 666\,^\circ\mathrm{C}$ *a* $p = 666\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$*. Zde se bude snažit zbavit molekul hříchů, aby se mohla opět vznést. Molární hmotnost hříchu je* $666\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$*. Kolik hříchů Jarda za své působení ve FYKOSu nabere? Hmotnost čisté duše je* $21\,\mathrm{g}$ *a její hustota se za normálních podmínek rovná* $0{,}70\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*. Duši i hříchy považujte za ideální plyn.* *Jardovi neprošla úloha politickou korekturou.*

Jardova duše vařící se v izolovaném kotli splňuje stavovou rovnici ideálního plynu

$$\frac{pV}{T} = nR ,$$

kde R je plynová konstanta a $n = n_\mathrm{h} + n_\mathrm{č}$ je součet počtu molů hříchu a čisté duše.
Jardova duše byla původně čistá jako každá jiná, ale přibyly do ní hříchy. Počet molů čisté duše vypočítáme z její molární hmotnosti a $m = 21\,\mathrm{g}$ jako

$$n_\mathrm{č} = \frac{m}{M_\mathrm{č}} ,$$

kde $M_\mathrm{č}$ získáme z jiné stavové rovnice

$$\frac{p_\mathrm{a}}{T_\mathrm{a}\rho} = \frac{R}{M_\mathrm{č}} ,$$

která plyne z informace o hustotě za normálních podmínek T_a a p_a. Dosadíme-li, dostaneme počet molů hříchů jako

$$n_\mathrm{h} = \frac{pV}{TR} - n_\mathrm{č} = \frac{pV}{TR} - \frac{mp_\mathrm{a}}{RT_\mathrm{a}\rho}\,.$$

Vynásobením molární hmotností získáme

$$m_\mathrm{h} = \frac{M_\mathrm{h}}{R}\left(\frac{pV}{T} - \frac{mp_\mathrm{a}}{T_\mathrm{a}\rho}\right) = 2{,}95\,\mathrm{kg}\,.$$

Amen.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 17 ... takhle jste to myslel pane Plancku? 5 bodů

Určete Planckovo povrchové napětí.

Hint: Planckovy jednotky jsou takové, které vzniknou kombinací tří základních fyzikálních konstant – gravitační konstanty G, redukované Planckovy konstanty $\hbar$ a rychlosti světla c. Jen pro zajímavost, předpokládá se, že na Planckových škálách v mikrosvětě selhává standardní model kvantové fyziky a musí se vzít v potaz i efekty kvantové gravitace (o které zatím nic nevíme).

Jindra vymyslel úlohu, která má kratší zadání (bez hintu) než název.

Tři základní fyzikální konstanty k určení Planckových veličin jsou gravitační konstanta $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}}$, Planckova konstanta $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$ a rychlost světla $c = 2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Povrchové napětí má jednotku $\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ neboli $\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$.

Použijeme rozměrovou analýzu. Předpokládáme, že Planckovo povrchové napětí σ_P bude součinem mocnin těchto tří konstant

$$\sigma_\mathrm{P} = CG^\alpha\hbar^\beta c^\gamma\,. \tag{2}$$

C je bezrozměrná konstanta, kterou z rozměrové analýzy určit nemůžeme. Při odvozování Planckových jednotek se standardně používá $C = 1$. Při obecném použití rozměrové analýzy je nicméně lepší ve výrazu nechat neznámé C, aby bylo jasné, že správný vztah se může lišit o násobek konstantou.

Do rovnice (2) dosadíme jednotky fyzikálních veličin

$$\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}} = (\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}})^\alpha(\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}})^\beta(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^\gamma = \mathrm{kg}^{-\alpha+\beta}\cdot\mathrm{m}^{3\alpha+2\beta+\gamma}\cdot\mathrm{s}^{-2\alpha-\beta-\gamma}.$$

Jelikož počet jednotek na levé i pravé straně musí být stejný, dostaneme soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých.

$$\begin{aligned} -\alpha + \beta &= 1\\ 3\alpha + 2\beta + \gamma &= 0\\ -2\alpha - \beta - \gamma &= -2 \end{aligned}$$

Sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme $\alpha + \beta = -2$. V kombinaci s první rovnicí tak zjistíme $\alpha = -3/2$, $\beta = -1/2$. Z toho vyplývá $\gamma = 11/2$. Planckovo povrchové napětí je

$$\sigma_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{c^{11}}{\hbar G^3}} = 7{,}49 \cdot 10^{78}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}.$$

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 18 ... rozžhavený odporový drát 5 bodů

Mějme široký odporový drát, který má při teplotě $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ délku $l_0 = 10\,\mathrm{m}$ a odpor $R_0 = 1{,}23\,\Omega$. Průchodem proudu se zahřeje na $T = 100\,^\circ\mathrm{C}$, čímž se změní jeho rozměry i měrný odpor. Náš drát má koeficient délkové teplotní roztažnosti $\alpha_l = 2{,}43 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}$ a jeho teplotní součinitel měrného elektrického odporu je $\alpha_R = 3{,}92 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}$. Jaký bude odpor drátu při teplotě T, pokud je připojen ke zdroji tak, že se jeho rozměry mohou s teplotou měnit?

Karel se učil učit a zamyslel se nad materiálovými konstantami.

Označme si merný elektrický odpor drôtu pri teplote T_0 ako ρ_0 a jeho prierez ako S_0. Štandardný vzťah, ktorý spája dĺžku telesa s jeho teplotou cez koeficient dĺžkovej teplotnej rozťažnosti, má tvar

$$l = l_0 \left(1 + \alpha_l \left(T - T_0\right)\right) .$$

Obdobný vzťah platí aj pre prierez, akurát ten je škálovaný s lineárnym rozmerom ako jeho druhá mocnina. Preto platí

$$S = S_0 \left(1 + \alpha_l \left(T - T_0\right)\right)^2 .$$

Čo sa týka odporu, vieme, že pre konštantné rozmery drôtu má rásť ako

$$R = R_0 \left(1 + \alpha_R \left(T - T_0\right)\right) .$$

Keďže jediné, čo sa môže meniť, ak sú rozmery drôtu konštantné, je merný odpor, a navyše výsledný odpor je mu priamo úmerný, musí platiť

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \alpha_R \left(T - T_0\right)\right) .$$

Teraz zostáva všetko dosadiť do známeho vzťahu pre odpor drôtu

$$\begin{aligned} R &= \rho \frac{l}{S} , \\ R &= \rho_0 \left(1 + \alpha_R \left(T - T_0\right)\right) \frac{l_0 \left(1 + \alpha_l \left(T - T_0\right)\right)}{S_0 \left(1 + \alpha_l \left(T - T_0\right)\right)^2} , \\ R &= R_0 \frac{1 + \alpha_R \left(T - T_0\right)}{1 + \alpha_l \left(T - T_0\right)} \approx 1{,}35\,\Omega . \end{aligned}$$

V realite sú ale koeficienty teplotnej rozťažnosti rádovo zanedbateľné oproti teplotným súčiniteľom elektrického odporu. Preto v praxi nie je potrebné počítať so zmenami rozmerov drôtu, ak chceme zistiť iba jeho odpor.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 19 ... golf na kopci

5 bodů

Hráč golfu si věřil na úder přes celé hřiště. V přímém přenosu televize se mu ale rozklepaly ruce a odpal se mu vůbec nepovedl. Míček podebral tak, že vyletěl rychlostí $v = 8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod úhlem $\alpha = 80^\circ$ vůči horizontální rovině. Odpal provedl směrem ze svahu, který má od vodorovného směru odchylku $\beta = 10^\circ$. Zklamaný golfista se otočil a ani se nepodíval, jak daleko od bodu odpalu míček dopadl. Proto tento údaj spočítejte. *Toho dne Kuba ztratil další míček...*

Zaveďme kartézský souřadnicový systém se středem v bodě odpalu míčku. Ve směru osy x na míček žádná síla nepůsobí, ale ve směru osy y mu tíhová síla udává záporné zrychlení g. V čase t je pak poloha míčku $x = v_0 t\cos\alpha$ a $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$. Z rovnice pro x si vyjádříme čas t a dosadíme jej do rovnice pro y. Tím se zbavíme parametru t a získáme rovnici paraboly, po které se míček pohybuje

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \;\Rightarrow\; y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}\,.$$

Rovina kopce má směrnici $\mathrm{tg}(180^\circ - \beta) = -\,\mathrm{tg}\,\beta$, takže ji popisuje rovnice $y = -x\,\mathrm{tg}\,\beta$. Porovnáním rovnic paraboly a roviny kopce dostaneme jejich průsečíky, tedy bod odpalu $x = 0$ a bod dopadu

$$x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} = -x\,\mathrm{tg}\,\beta\,.$$

Chceme získat vodorovnou vzdálenost bodu dopadu, kde $x \neq 0$ (případ $x = 0$ by odpovídal bodu odpalu), proto rovnici vydělíme x

$$\frac{gx}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} = \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta$$

$$x = \frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)}{g}\,.$$

Teď už zbývá pouze vyjádřit hledanou vzdálenost d pomocí vodorovné x. Všimneme si, že platí

$$\cos\beta = \frac{x}{d}\,.$$

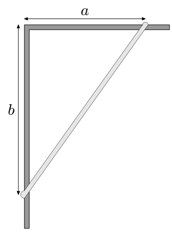
Výsledná vzdálenost odpovídá

$$d = \frac{x}{\cos\beta} = \frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)}{g\cos\beta} \doteq 2{,}3\,\mathrm{m}\,.$$

Jakub Smolík
jakub.smolik@fykos.cz

Úloha 20 ... gumička na rohu

4 body



Na roh tuhého tělesa ve tvaru písmene L navlékneme nehmotnou gumičku. Jakou nejmenší velikost musí mít koeficient tření mezi gumičkou a tělesem, aby se nezačala stahovat, pokud se přes hrany tělesa ohýbá v bodech vzdálených $a = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ *a* $b = 7{,}0\,\mathrm{cm}$ *od rohu?* *Jardu chtějí natáhnout na skřipec.*

Gumičku si můžeme představit jako soubor dvou pružinek (každá z jedné strany tělesa), které obě začínají a končí v bodech dotyku gumičky s předmětem. Tyto body označme jako A a B. Obě pružinky působí dohromady silou F v bodě A, a to směrem k bodu B (a naopak).

Aby se gumička nezačala stahovat, musí být třecí síla v obou bodech větší než síla pružnosti. Třecí síla má v bodě A tvar $F_{\mathrm{TA}} = fF\cos\alpha$, zatímco v bodě B to je $F_{\mathrm{TB}} = fF\sin\alpha$. Pro úhel α platí $\operatorname{tg}\alpha = a/b$.

Síla snažící se gumičku stáhnout se v bodě A rovná $F_{\mathrm{A}} = F\sin\alpha$, v bodě B pak $F_{\mathrm{B}} = F\cos\alpha$. Aby gumička zůstala v klidu, musí platit

$$fF\cos\alpha \geq F\sin\alpha\,,$$
$$fF\sin\alpha \geq F\cos\alpha\,.$$

Přenásobíme-li první nerovnici f a dosadíme za druhou stranu, dostaneme podmínku $f \geq 1$.

V našem případě je $\alpha < 45^\circ$. Pak je první nerovnice určitě splněna pro všechna $f \geq 1$. Ze druhé nerovnice však plyne

$$f \geq \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} = 1{,}4\,.$$

Koeficient tření tak musí být aspoň 1,4.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 21 ... polohový snímač

6 bodů

Mějme nádobu s nevodivou kapalinou o relativní permitivitě $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1{,}80$*, v níž jsou částečně ponořeny dvě svislé paralelní desky tvořící deskový kondenzátor. Ten je připojen k cívce tak, že jsou společně součástí kmitavého obvodu LC oscilátoru. Kolikrát se zvýší vlastní frekvence tohoto oscilátoru, když jsou desky kondenzátoru ze čtvrtiny ponořeny, oproti případu, kdy je nádoba prázdná?*

Stejně jako Vašek jste i vy určitě už někdy přemýšleli, jak nemechanicky měřit výšku hladiny.

Frekvenci LC oscilátoru můžeme určit podle vztahu

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,,$$

kde kapacitu deskového kondenzátoru o ploše desek S vzdálených o d ve vzduchu určíme jako

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\,.$$

Když ponoříme desky do kapaliny, můžeme na zařízení nahlížet jako na dva paralelně zapojené kondenzátory – jeden s plochou desek $3S/4$, druhý s plochou $S/4$. Jejich kapacita pak bude díky paralelnímu zapojení dána součtem jednotlivých kapacit. Bude tedy platit

$$C' = \varepsilon_0 \frac{3S}{4d} + \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{S}{4d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \frac{3 + \varepsilon_\mathrm{r}}{4} \,.$$

Teď můžeme už určit poměr vlastních frekvencí jako

$$\frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{C}{C'}} = \sqrt{\frac{4}{3 + \varepsilon_\mathrm{r}}} \doteq 0{,}913 \,.$$

Vlastní frekvence se tedy sníží. Zmiňme, že se vlastně jedná o *kapacitní snímač polohy hladiny.*

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 22 ... horská cyklistika reloaded

4 body

Matěj jede po horské cyklostezce a míjí protijedoucí jezdce na kolech. Na vršku kopce se vyčerpaní cyklisté pohybují průměrnou rychlostí $5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ *v obou směrech a Matěj zde v průměru potkává* $0{,}02$ *protijedoucích kol za sekundu. Naopak v nejnižším bodě trasy jsou cyklisté rozjetí v průměru na rychlost* $50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ *(z obou směrů). Kolik protijedoucích kol za sekundu zde Matěj v průměru potkává? Cyklostezka nemá žádné odbočky a Matěj se vždy pohybuje rychlostí* $10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Matěj se rozhodl vyrazit na kole do hor.

Označme si frekvenci f_0, se kterou budou cyklisté v jednom směru míjet stojícího pozorovatele. Pokud se v daném místě cyklisti pohybují průměrnou rychlostí v, pak jejich průměrná délková hustota na cestě bude $\lambda = f_0/v$. Matějovu rychlost označme u. Vůči stojícímu pozorovateli Matěj za sekundu mine o $u\lambda$ cyklistů více. Matějova frekvence míjení protijedoucích cyklistů je tedy $f = f_0 + u\lambda = f_0\,(1 + u/v)$.

Máme dvě rovnice (pro vršek a spodek kopce), z nichž můžeme vyloučit neznámou f_0

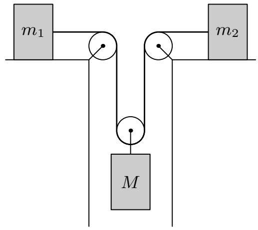
$$f_\mathrm{top} = f_0 \left(1 + \frac{u}{v_\mathrm{top}}\right) \,,$$
$$f_\mathrm{bot} = f_0 \left(1 + \frac{u}{v_\mathrm{bot}}\right) \,,$$

čímž dostáváme hledanou frekvenci

$$f_\mathrm{bot} = f_\mathrm{top} \frac{v_\mathrm{top}(v_\mathrm{bot} + v)}{v_\mathrm{bot}(v_\mathrm{top} + v)} = 0{,}008 \,.$$

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha 23 ... jáma s kladkami 5 bodů



Máme jámu, ve které visí na volné kladce kvádr o hmotnosti $M = 84{,}6\,\mathrm{kg}$. Na vodorovném povrchu leží nalevo od jámy kvádr s hmotností $m_1 = 26{,}4\,\mathrm{kg}$, napravo pak další kvádr o hmotnosti $m_2 = 33{,}8\,\mathrm{kg}$. Ke každému z nich je přivázán jeden konec lana, na kterém v jámě visí volná kladka. Na hranách jámy jsou samozřejmě dvě kladky, aby lano vedlo pouze vodorovně a svisle.

Všechno se pohybuje bez tření, lano i kladky jsou nehmotné. Jakou velikost bude mít zrychlení, se kterým se bude pohybovat kvádr v jámě? *Legovi přišlo, že dává málo kladek.*

Nakoľko sú lano aj kladky nehmotné, musí na každý element lana pôsobiť nulová výsledná sila (lebo $F = ma$). Preto je lano po celej svojej dĺžke napínané rovnakou silou, označme si ju T. Keďže pre kvádre m_1 a m_2 sa ich tiaž vyruší s normálovou silou od podložky, je ťahová sila od lana aj výslednou silou, ktorá na ne pôsobí. Takže kváder m_1 bude zrýchľovať so zrýchlením $a_1 = T/m_1$ smerom k jame a podobne m_2 bude zrýchľovať s $a_2 = T/m_2$.

Kváder v jame je ťahaný nadol vlastnou tiažou veľkosti $F_g = Mg$ a nahor z oboch strán ťahovou silou lana T, čiže spolu $2T$. Jeho výsledné zrýchlenie smerom nadol teda bude $a = g - 2T/M$.

Ako tieto zrýchlenia spolu súvisia? Ak by sme posunuli prvý kváder o x_1 a druhý kváder o x_2, oba smerom k jame, tak sa kváder v jame (pretože je na voľnej kladke medzi týmito kvádrami) posunie o priemer týchto posunutí (pre intuíciu si to môžeme ľahko overiť na prípadoch, kedy $x_1 = x_2$, alebo $x_2 = 0$). Symbolicky $x = (x_1 + x_2)/2$. No a keď túto rovnosť 2-krát zderivujeme podľa času, dostávame hľadaný vzťah pre zrýchlenia $a = (a_1 + a_2)/2$.

Do tohto vzťahu dosadíme všetky vypočítané zrýchlenia a vyjadríme T

$$
\begin{aligned}
g - 2\frac{T}{M} &= \frac{\frac{T}{m_1} + \frac{T}{m_2}}{2} \\
g &= T\left(\frac{2}{M} + \frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_1}\right) \\
T &= \frac{g}{\frac{2}{M} + \frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_1}}\,.
\end{aligned}
$$

Zostáva dosadiť T naspäť do zrýchlenia kvádru v jame a máme výsledok

$$
a = g - 2\frac{T}{M} = g - 2\frac{g}{\frac{2M}{M} + \frac{M}{2m_2} + \frac{M}{2m_1}} = g\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{M}{4m_2} + \frac{M}{4m_1}}\right) = 5{,}77\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.
$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 24 ... efektivní lichoběžník 5 bodů

Mějme elektrický zdroj, který poskytuje lichoběžníkové napětí takové, že první třetinu periody lineárně roste z $0{,}00\,\mathrm{V}$ na $5{,}00\,\mathrm{V}$, pak se třetinu periody drží na konstantní hodnotě $5{,}00\,\mathrm{V}$ a v poslední třetině periody lineárně klesá zpět na $0{,}00\,\mathrm{V}$. Zdroj připojíme k rezistoru. Jakým *zdrojem konstantního napětí bychom mohli původní zdroj nahradit, aby na součástce byl stejný střední výkon (tedy určete jeho efektivní napětí)?* *Karel varioval úlohu na efektivní hodnoty.*

Střední výkon zdroje střídavého proudu určíme integrací okamžitého výkonu přes jednu periodu (a podělením touto periodou), tedy

$$\frac{U_{\mathrm{ef}}^2}{R} = \overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P\,\mathrm{d}t\,.$$

V našem případě můžeme okamžitý výkon psát jako

$$P = \frac{U^2}{R}\,,$$

kde napětí U má na časovém intervalu $[0,T]$ průběh

$$U = \begin{cases} \frac{3t}{T}\cdot 5\,\mathrm{V} & t\in[0,T/3)\,\mathrm{s} \\ 5\,\mathrm{V} & t\in[T/3,2T/3]\,\mathrm{s} \\ \frac{3(T-t)}{T}\cdot 5\,\mathrm{V} & t\in(2T/3,T]\,\mathrm{s} \end{cases}$$

Můžeme tedy dosadit, rozepsat na tři integrály. Dostaneme pak

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{ef}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/3}\frac{225t^2}{T^2}\,\mathrm{d}t + \int_{T/3}^{2T/3} 25\,\mathrm{d}t + \int_{2T/3}^{T}\frac{225(T-t)^2}{T^2}\,\mathrm{d}t\right)}\,\mathrm{V} = \\ &= \sqrt{\frac{450}{T^3}\int_0^{T/3} t^2\,\mathrm{d}t + \frac{25}{3}}\,\mathrm{V} = \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{3}\,\mathrm{V} \doteq 3{,}73\,\mathrm{V}\,. \end{aligned}$$

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 25 ... závod o čas — 4 body

Sedíte v autě, které jede konstantní rychlostí $80\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$*, a vjíždíte do* $5\,\mathrm{km}$ *dlouhého tunelu bez mobilního signálu. Zároveň sledujete na mobilu etapu Tour de France, ve které zůstává do konce* $3{,}5\,\mathrm{km}$*. Cyklisté jedou rychlostí* $40\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ *a právě v momentě, kdy vám vypadne signál, začnou sjíždět z kopce, takže až do cíle budou rovnoměrně zrychlovat. Jaké mohou mít maximální zrychlení, abyste stihli vidět posledních* $30\,\mathrm{s}$ *etapy, když vyjedete z tunelu a opět chytíte signál?* *Dávid sledoval v autě cyklistiku.*

Pri zostavovaní rovnice pre pohyb cyklistov si najprv musíme uvedomiť, za aký dlhý čas cyklisti prídu do cieľa pri zadaných podmienkach. Z nich je zrejmé, že tento čas (t_c) je rovný súčtu času, za ktorý prejde auto tunelom (t_a) a rezervného času (t_r), ktorý vyjadruje, koľko má po výstupe z tunela ešte zostávať cyklistom do cieľa. Matematické vyjadrenie vyzerá nasledovne

$$t_\mathrm{c} = t_\mathrm{a} + t_\mathrm{r} = \frac{s_\mathrm{a}}{v_\mathrm{a}} + t_\mathrm{r} = 255\,\mathrm{s}\,. \tag{3}$$

Teraz si môžeme zostaviť rovnicu pre dráhu prejdenú cyklistami, a následne z tejto rovnice vyjadriť zrýchlenie a_{max}

$$s_{\mathrm{c}} = v_{\mathrm{c}} t_{\mathrm{c}} + \frac{a_{\mathrm{max}} t_{\mathrm{c}}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{max}} = \frac{2\left(s_{\mathrm{c}} - v_{\mathrm{c}} t_{\mathrm{c}}\right)}{t_{\mathrm{c}}^2}\,. \tag{4}$$

Pre všeobecné vyjadrenie výsledku ešte dosadíme výraz, ktorý sme dostali v (3) do rovnice (4)

$$a_{\mathrm{max}} = \frac{2\left(s_{\mathrm{c}} - v_{\mathrm{c}}\left(\frac{s_{\mathrm{a}}}{v_{\mathrm{a}}} + t_{\mathrm{r}}\right)\right)}{\left(\frac{s_{\mathrm{a}}}{v_{\mathrm{a}}} + t_{\mathrm{r}}\right)^2} = 0{,}021\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Výsledkom je teda $a_{\mathrm{max}} = 0{,}021\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Dávid Brodňanský
david.brodnansky@fykos.cz

Úloha 26 ... útěk přes zamrzlé jezero

4 body

Emigrant se pokouší v zimě prchnout ze země a jeho cesta vede přes zamrzlé jezero. V patách je mu ale pohraniční stráž, proto musí svou trasu plánovat co nejefektivněji. Přes jezero vede přímá státní hranice, za kterou již bude v bezpečí. Všude kolem břehu bylo husté rákosí, najednou ale uviděl volnou ledovou plochu. Na zamrzlou hladinu vběhl rychlostí $u = 4{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ směrem rovnoběžně k hranici, od které byl vzdálen $d = 38\,\mathrm{m}$. Jak nejméně dlouho mu bude trvat se dostat do bezpečí, pokud je koeficient tření mezi ledem a jeho botami $f = 0{,}05$ a žádné další překážky už mu nestojí v cestě?

Jarda si myslí, že toto jsou teď reálné problémy ve východní Evropě.

Maximální síla, kterou může v jakémkoliv vodorovném směru působit, je $F = fmg$. Z Newtonovy pohybové rovnice pak dostaneme vztah pro maximální zrychlení $a = gf$.

Aby se dostal přes hranici co nejrychleji, musí svůj pohyb vykonávat tak, aby jeho výsledné zrychlení působilo kolmo k hranici. Jedná se tak o rovnoměrně zrychlený pohyb, pro který platí $s = \frac{1}{2}at^2$, odkud po dosazení $a = gf$ a $s = d$ dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{2d}{gf}} = 12{,}4\,\mathrm{s}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 27 ... zahřejeme helium

5 bodů

Neznámý objem V_0 plynného helia uchováváme za atmosférického tlaku a při teplotě $T_0 = 297\,\mathrm{K}$. Jak velký je tento objem, pokud se dodáním tepla $Q = 42\,\mathrm{J}$ za konstantního tlaku zvýší teplota plynu o $\Delta T = 2{,}5\,\mathrm{K}$? *Karel procházel učebnice a tohle tam neviděl.*

Pri izobarickom procese (t.j. procese s konštantným tlakom) je zo stavovej rovnice

$$pV = nRT$$

zrejmé, že teplota a objem budú priamo úmerné. Ak sa teplota zvýši z T_0 na $T_1 = T_0 + \Delta T$, objem sa potom zväčší z V_0 na

$$V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0} = V_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) .$$

Môžeme teda okamžite spočítať prácu, ktorá sa pri tom vykoná. Nakoľko $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V$ a tlak sa pri tomto procese nemení, stačí vynásobiť tlak zmenou objemu a vykonaná práca je

$$W = p_\mathrm{a} \Delta V = p_\mathrm{a} V_0 \frac{\Delta T}{T_0} .$$

Musíme si však uvedomiť si, že dodané teplo Q sa okrem práce premenilo aj na zvýšenie vnútornej energie plynu. Vieme, že vnútorná energia plynu je úmerná nRT (teda rovnako je úmerná i pV). Aká je však konštanta úmery? Ekvipartičný teorém hovorí, že táto konštanta je $n/2$, kde n je počet stupňov voľnosti pohybu molekúl. Pre jednoatómový plyn platí $n = 3$, nakoľko sa molekula môže nezávisle pohybovať v smeroch x, y, z. Keďže hélium je jednoatómový plyn, vnútorná energia plynu pri tomto zahriatí narástla o

$$\Delta U = U_1 - U_0 = \frac{3}{2} nRT_1 - \frac{3}{2} nRT_0 = \frac{3}{2} p_\mathrm{a} \Delta V .$$

Substitúciou do prvého termodynamického zákona dostávame

$$Q = W + \Delta U = p_\mathrm{a} V_0 \frac{\Delta T}{T_0} + \frac{3}{2} p_\mathrm{a} V_0 \frac{\Delta T}{T_0} ,$$

$$V_0 = \frac{2QT_0}{5p_\mathrm{a}\Delta T} = 1{,}97 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 .$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha 28 ... tropické klima — 5 bodů

Viktor chce, aby se jeho pokojovým rostlinám dařilo, a tak se rozhodl, že v pokoji zvýší vzdušnou vlhkost. Před zapnutím zvlhčovače byla humidita v místnosti $30\,\%$. Zvlhčovač dokáže každou minutu odpařit $5\,\mathrm{ml}$ vody. Na jaké hodnotě v procentech by se vlhkost v pokoji ustálila, pokud by Viktor pootevřel okno a každou minutu by se vyměnila v místnosti $3\,\%$ vzduchu? Předpokládejme, že venkovní atmosféra má stejnou humiditu jako vzduch uvnitř místnosti před zapnutím přístroje. Viktorův pokoj má rozměry $4 \times 5 \times 2{,}5\,\mathrm{m}$ a teplota vzduchu je $25\,\mathrm{^\circ C}$.

Viktor si chtěl vyzkoušet, jaké je to žít v pralese.

Označme začiatočnú relatívnu vlhkosť v miestnosti Φ_0 a relatívnu vlhkosť v ustálenom stave Φ_e. Ak je relatívna vlhkosť v miestnosti ustálená, nemení sa celková hmotnosť vodnej pary vo vzduchu v miestnosti. Keď sa pozrieme na bilanciu, zvlhčovač každú minútu pridá do vzduchu vodnú paru o hmotnosti

$$m_1 = V_0 \rho ,$$

kde $V_0 = 5\,\mathrm{ml}$ je objem vody odparenej zvlhčovačom za jednu minútu a $\rho = 997\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ je hustota vody pri teplote $25\,\mathrm{^\circ C}$. Zároveň sa ale vetraním vymení časť $\eta = 3\,\%$ vlhkejšieho vzduchu z miestnosti za menej vlhký vzduch zvonka. Aby sme zistili, aká je hmotnosť m_2 vodnej pary, ktorá odíde týmto procesom z miestnosti za minútu, potrebujeme poznať dva vzťahy. Hmotnosť vodnej pary m vo vzduchu v miestnosti a absolútna vlhkosť θ sú spojené rovnicou

$$\theta = \frac{m}{V}\,,$$

kde V je objem miestnosti. Relatívnu vlhkosť vzduchu potom spočítame z absolútnej vlhkosti ako

$$\Phi = \frac{\theta}{\theta_\mathrm{n}}\,,$$

kde θ_n je absolútna vlhkosť vzduchu nasýteného vodnými parami (vtedy je relatívna vlhkosť $100\,\%$). Táto hodnota je závislá na teplote, pri zadaných $25\,{}^\circ\mathrm{C}$ je $\theta_\mathrm{n} = 23\,\mathrm{g{\cdot}m^{-3}}$. Použitím týchto dvoch rovníc pre absolútnu a relatívnu vlhkosť môžeme písať

$$m_2 = \eta abc(\theta_e - \theta_0)\,,$$
$$m_2 = \eta abc\theta_\mathrm{n}(\Phi_e - \Phi_0)\,,$$

kde abc je objem miestnosti. V rovnováhe platí $m_1 = m_2$. Teda dostávame

$$V_0\rho = \eta abc\theta_\mathrm{n}(\Phi_e - \Phi_0)\,.$$

Úpravami vyjadríme ustálenú relatívnu vlhkosť vzduchu Φ_e ako

$$\Phi_e = \Phi_0 + \frac{V_0\rho}{\eta abc\theta_\mathrm{n}}\,.$$

Dosadením číselných hodnôt dostávame $\Phi_e \doteq 44\,\%$.

Daniela Dupkalová
daniela@fykos.cz

Úloha 29 ... jáma a kyvadlo 6 bodů

Ve válcové jámě široké 30 cm máme na 50 cm dlouhém nehmotném provázku zavěšenu malou kuličku. Bod závěsu leží na ose souměrnosti jámy. Kuličce udělíme vodorovnou rychlost v takovou, že se dokonale pružně dvakrát odrazí od svislých stěn a vrátí zpět do původního bodu. Během tohoto děje žádným bodem prostoru neprojde dvakrát a na konci bude mít stejný vektor rychlosti jako na začátku. Určete velikost rychlosti v.

Jarda náhodou dával pozor na hodině literatury.

Po udělení vodorovné rychlosti se kulička začne pohybovat po kružnici tak, jak jí to dovoluje závěs, na kterém je upevněna. Po dokonale pružném odrazu od stěny se zachová svislá složka rychlosti. Vodorovná složka změní znaménko, ale ne směr, kulička se tak bude pohybovat zpět směrem k ose symetrie válcové jámy. Poté nastane druhý odraz a kulička se znovu vrací zpět. Protože požadujeme, aby žádným bodem během tohoto děje neprošla dvakrát, tak po prvním odrazu se bude pohybovat vzduchem po parabole, načež po druhém zase začne opisovat oblouk kružnice.

Při odrazech platí zákon dopadu a odrazu, takže úhly trajektorií (kružnice a paraboly) vůči svislé ose jsou stejné.

Úhel dopadu α vypočítáme z geomerie úlohy jako

$$\sin\alpha = \frac{d}{2l}\,,$$

kde d je šířka jámy a l délka kyvadla.

Označme rychlost kuličky po odrazu jako v_o. Pak se bude pohybovat po parabole o rovnici

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_\mathrm{o}^2\cos^2\alpha}\,,$$

kde y je svislá souřadnice, x vodorovná směrem od stěny a g tíhové zrychlení. Dopad nastává pro $y = 0$ a $x = d$, z rovnice tedy vyjádříme v_o jako

$$v_\mathrm{o} = \sqrt{\frac{gd}{2\sin\alpha\cos\alpha}}\,.$$

Ze zákona zachování energie však ještě musíme určit rychlost kuličky v nejnižším bodě jako

$$v = \sqrt{v_\mathrm{o}^2 + 2gl\left(1-\cos\alpha\right)} = \sqrt{\frac{gd}{2\sin\alpha\cos\alpha} + 2gl\left(1-\cos\alpha\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{gl}{\sqrt{1-\left(\frac{d}{2l}\right)^2}} + 2g\left(l - \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right)} = 2{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 30 ... magnetorezistor 5 bodů

Sestavíme si obvod z odporu $R = 57\,\mathrm{m\Omega}$ ve tvaru dlouhého přímého vodiče. Paralelně k vodiči připojíme magnetorezistor, tedy součástku, která mění svůj odpor v závislosti na vnějším magnetickém poli. Vzdálenost magnetorezistoru od vodiče je $d = 3{,}5\,\mathrm{cm}$ a jeho odpor při nulovém magnetickém poli je $r_0 = 85\,\Omega$. Na dlouhý přímý vodič paralelně připojíme zdroj o napětí $U = 12\,\mathrm{V}$, magnetorezistorem po ustálení poteče proud $I = 140\,\mathrm{mA}$. Předpokládejte, že se jeho odpor mění v závislosti na magnetické indukci B na daném rozsahu lineárně. Určete koeficient úměrnosti. *Jarda se ztratil ve fyzikálním skladu.*

Odpor magnetorezistoru se mění jako $r = r_0 + \alpha B$, kde

$$\alpha = \frac{r - r_0}{B}$$

chceme určit. Pole B závisí na proudu vodičem R dle vztahu

$$B = \frac{\mu_0 I_R}{2\pi d} = \frac{\mu_0 U}{2\pi d R}\,,$$

kde μ_0 je permeabilita (vakua) a I_R je proud v odporu.

Odpor r_0 známe ze zadání a odpor r je roven U/I. Dosazením do předchozího vztahu dostaneme

$$\alpha = \frac{2\pi}{\mu_0} dR \left(\frac{1}{I} - \frac{r_0}{U} \right) \doteq 590\,\Omega{\cdot}\mathrm{T}^{-1} \,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 31 ... kolo proti směru 5 bodů

Jakou část z celkové doby jízdy má složka rychlosti daného bodu z nejzazšího okraje železničního kola (okolku), která je rovnoběžná se zemí, opačný směr, než jakým jede vlak? Uvažujte, že kolo přesahuje kolej o 35 mm *a jeho průměr i s okolkem je* 1 400 mm. *Karel přemýšlel nad vlaky.*

Část doby, po kterou se okolek pohybuje proti směru jízdy, bude záviset jen na průměru kola $d = 1\,400\,\mathrm{mm}$ a přesahu okolku $l = 35\,\mathrm{mm}$. Bod na nejzazším okraji kola koná rovnoměrný přímočarý pohyb ve směru jízdy a rovnoměrný pohyb po kružnici se středem v ose kola, s nímž svírá vůči vodorovné ose úhel α. Abychom mohli vyjádřit oba pohyby pomocí zadaných hodnot, zavedeme ω, což je úhlová rychlost, kterou se kolo otáčí a je konstantní. Vyjádříme z ní rychlost přímočarého pohybu ve směru jízdy v_1

$$v_1 = \omega \left(\frac{d}{2} - l \right) \,.$$

Rychlost bodu na okraji kola při pohybu po kružnici v_2 bude

$$v_2 = \omega \frac{d}{2} \,.$$

Vektor rychlosti v_2 je vždy kolmý na vektor polohy bodu na okraji kola. Rozložíme jej na dva vektory, z nichž jeden bude rovnoběžný s vektorem rychlosti v_1, to je ten, který nás zajímá, pokud má opačný směr než v_1. Označíme ho v_3. Pokud je jeho velikost větší než velikost vektoru v_1, znamená to, že krajní bod na kole se pohybuje proti směru jízdy, protože jeho vodorovný pohyb je součtem vektorů v_1 a v_3. Pomocí goniometrických funkcí vyjádříme v_3 z v_2.

$$v_3 = v_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \omega \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \omega \frac{d}{2} \sin\alpha \,.$$

Teď položíme v_1 roven v_3 a zjistíme, pro jaké úhly α rovnost platí.

$$\omega \frac{d}{2} \sin\alpha = \omega \left(\frac{d}{2} - l \right)$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{d}{2} - l}{\frac{d}{2}} \,.$$

Vyjde nám $\alpha_1 = 1{,}253\,\mathrm{rad}$ a $\alpha_2 = 1{,}888\,\mathrm{rad}$. V intervalu mezi těmito úhly je rychlost v_3 větší než rychlost v_2 a bod na kraji kola se pohybuje proti směru. Zbývá zjistit, jak velká je to část z celkové doby.

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} = 0{,}10 \,.$$

Z výsledku vidíme, že bod na kraji kola se v protisměru pohybuje desetinu času.

Josef Knápek
`josef.knapek@fykos.cz`

Úloha 32 ... moc vysoká frekvence 6 bodů

Ke zdroji střídavého napětí mějme do série připojený rezistor o odporu $R = 11\,\mathrm{k\Omega}$ a kondenzátor s kapacitou $C = 2\,\mathrm{\mu F}$. Pro jakou hodnotu frekvence v obvodu klesne amplituda napětí na kondenzátoru na desetinu maximální dosažitelné hodnoty?

Jarda nemá rád rychlé změny.

Impedance rezistoru se jednoduše rovná R, zatímco u kondenzátoru se určí jako $\frac{-i}{C\omega}$, kde i je imaginární jednotka a $\omega = 2\pi f$ úhlová frekvence zdroje. Úlohu vyřešíme v komplexních číslech.

Celková impedance při zapojení v sérii má tvar $Z = R - \frac{i}{C\omega}$. Komplexní proud v obvodu tak bude $\frac{U}{Z}$. Na rezistoru ubyde napětí RI a na kondenzátoru zbývá

$$U_C = U - RI = U\left(1 - \frac{R}{Z}\right) = U\frac{-\frac{i}{C\omega}}{R - \frac{i}{C\omega}} = U\frac{-i}{RC\omega - i}\,.$$

Zajímá nás amplituda napětí na kondenzátoru, která je určena absolutní hodnotou U_C podle vztahu

$$|U_C| = \frac{U}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}\,.$$

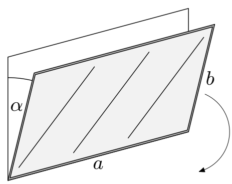
Maximální napětí na kondenzátoru zřejmě nastává při nulové frekvenci (stejnosměrném proudu), což je $U_{\max} = U$. Z podmínky ze zadání dostáváme rovnici

$$\frac{|U_C|}{|U|} = \frac{1}{10} \quad\Rightarrow\quad f = \frac{\sqrt{99}}{2\pi RC} \doteq 72\,\mathrm{Hz}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 33 ... pozor, padá okno 7 bodů

Obdélníkové okno je na své horní straně pootevřeno a jeho rovina tak svírá se svislým směrem úhel 10°. Kvůli silnému větru se ovšem uvolní pojistka, která ho držela, a okno se začne otáčet kolem spodní vodorovné osy, než narazí do zdi pod ním. Jakou úhlovou rychlostí narazí? Samotné sklo má plošnou hustotu $\rho = 15\,\mathrm{kg\cdot m^{-2}}$, rozměry $a = 130\,\mathrm{cm}$ na $b = 60\,\mathrm{cm}$ a je vsazené do rámu o hmotnosti $m_\mathrm{r} = 4\,\mathrm{kg}$ (jeho rozměry neuvažujte). Celé okno považujte za rovinné a po částech homogenní. Bohužel. Jarda musí hledat sklenáře, ale tak aspoň má úlohu do FOLu.



Úlohu vyřešíme pomocí zákona zachování energie. Potenciální energie se přemění na rotační kolem spodní osy podle vztahu

$$Mg\Delta h = \frac{1}{2}J\omega^2\,,$$

kde M je celková hmotnost okna, g tíhové zrychlení, Δh je rozdíl poloh těžiště na začátku a na konci děje, J moment setrvačnosti vůči ose otáčení a ω úhlová rychlost okna při nárazu.

Rozdíl poloh určíme jako

$$\Delta h = \frac{(1 + \cos\alpha)}{2}b\,,$$

kde $b = 60\,\mathrm{cm}$ je výška okna a α počáteční úhel otevření. Dvojka ve jmenovateli je kvůli tomu, že těžiště okna se nachází v polovině jeho výšky.

Celková hmotnost okna je jednoduše $M = m_\mathrm{r} + m_\mathrm{s} = m_\mathrm{r} + ab\rho$.

Celkový moment setrvačnosti je dán součtem momentu setrvačnosti skla a rámu. Podíváme-li se na sklo z boku, uvidíme ho jako otáčející se úsečku. Moment setrvačnosti otáčející se tyče kolem jednoho z konců je $ml^2/3$, kde m je hmotnost tyče a l její délka. V našem případě nehraje roli, jestli se otáčí tyč nebo obdélník (z boku vypadají stejně). Proto bude moment setrvačnosti skla $J_\mathrm{s} = ab\rho b^2/3$.

U rámu je situace o něco složitější. Dělí se na čtyři úsečky, z nichž jedna se neotáčí, další dvě vypadají při pohledu z boku znovu jako tyče a poslední čtvrtá (původně nahoře) vypadá jako bod. Při výpočtu momentů setrvačnosti jednotlivých kousků zavedeme délkovou hustotu rámu jako $\lambda = m_\mathrm{r}/(2a + 2b)$. Pak je moment setrvačnosti původně horní části rámu roven $m_\mathrm{rh}b^2 = \lambda ab^2$ a pro boční části rámu dohromady $2m_\mathrm{rb}b^2/3 = 2\lambda b^3/3$. Celkový moment setrvačnosti rámu tak je

$$J_\mathrm{r} = \lambda\left(ab^2 + \frac{2}{3}b^3\right) = m_\mathrm{r}b^2\,\frac{a + \frac{2}{3}b}{2a + 2b}\,.$$

Nyní už máme vše potřebné, abychom zapsali finální výsledek jako

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mg\Delta h}{J}} = \sqrt{\frac{3\left(m_\mathrm{r} + ab\rho\right)g\left(1 + \cos\alpha\right)}{m_\mathrm{r}b\frac{3a+2b}{2a+2b} + a\ \rho b^2}} = 9{,}5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 34 ... bloky na sobě na rovině 5 bodů

Dva bloky o hmotnostech $600\,\mathrm{g}$ *a* $700\,\mathrm{g}$ *jsou položeny na sobě na nakloněné rovině, která je od vodorovného směru odchýlena o* 30°*. Těžší z nich je dole a rozhraní mezi nimi je dokonale hladké. Mezi spodním blokem a rovinou je součinitel statického tření* $0{,}3$*, zatímco součinitel dynamického tření je* $0{,}2$*. Jak velký úhel s nakloněnou rovinou svírá síla, kterou působí rovina na blok?* *Markovi připadal blok na nakloněné rovině osamělý.*

Označme hmotnost horního bloku m_1 a dolního m_2. Úhel nakloněné roviny označme α. Sílu, kterou působí nakloněná rovina na blok, můžeme rozložit do směru kolmého a rovnoběžného s rovinou. Kolmou složku označme F_n a rovnoběžnou F_t. F_t je realizována třením a je proto úměrná F_n.

Pokud síla odpovídající statickému tření „udrží“ dolní blok, bude platit $F_\mathrm{t} = 0{,}3F_\mathrm{n}$, pokud ne, bude platit $F_\mathrm{t} = 0{,}2F_\mathrm{n}$.

Protože horní blok nemůže propadnout dolním a dolní zase rovinou, platí

$$F_\mathrm{n} = (m_1 + m_2)g\cos\alpha\,.$$

Sílu, která působí na dolní blok proti síle F_t, označme F_1. Platí

$$F_1 = m_2 g\sin\alpha\,.$$

Podmínka toho, že statické tření „udrží“ dolní blok, odpovídá nerovnosti

$$
\begin{aligned}
0{,}3F_\mathrm{n} &> F_1\,,\\
0{,}3 &> \frac{m_2}{m_1+m_2}\operatorname{tg}\alpha\,,\\
0{,}3 &> 0{,}31\ldots\,,
\end{aligned}
$$

což neplatí, dolní blok se tedy bude hýbat.

Hledaný úhel označme β. Pro něj bude platit

$$
\operatorname{tg}\beta = \frac{F_\mathrm{N}}{F_\mathrm{t}} = \frac{F_\mathrm{N}}{0{,}2F_\mathrm{N}} = \frac{1}{0{,}2}
$$

a tedy nakonec

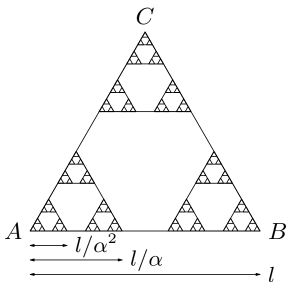
$$
\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{0{,}2} \doteq 78{,}7^\circ\,.
$$

Marek Milička
`marek.milicka@fykos.cz`

Úloha 35 ... dlouhé vedení 8 bodů

Mějme drát s konstantním elektrickým odporem $r_0 = 1\,\Omega$ na jednotku délky l. Z něj sestavíme odporovou síť podle schématu na obrázku. Začneme z velkého rovnostranného trojúhelníku o straně délky l. Body na jeho stranách ve vzdálenosti l/α (kde $\alpha \geq 2$) od nejbližšího vrcholu spojíme drátem, čímž v každém rohu vytvoříme α-krát menší trojúhelník. Stejný postup zopakujeme u menších trojúhelníků a tak dále až do nekonečna (v každém kroku vzniknou α-krát menší trojúhelníky než v předchozím). K uzlům A a B připojíme svorky zdroje. Jaký bude odpor této sítě, je-li $\alpha = 4$?

Radka nemohla najít konec prodlužovačky.



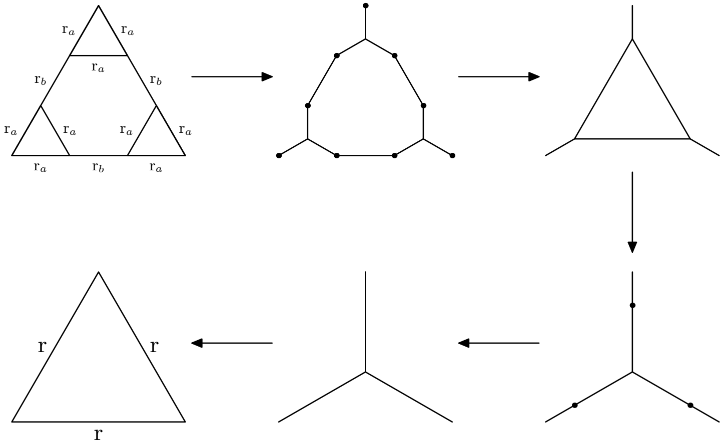
Pomocí převodů mezi zapojeními do trojúhelníku a do hvězdy je možné každý trojúhelník s menšími trojúhelníky v rozích převést na jednoduché zapojení do trojúhelníku.
Konkrétně, označíme-li odpory jako na obrázku (tedy r_a je odpor strany malého trojúhelníku a r_b odpor strany velkého trojúhelníku po odečtení dvojnásobku odporu strany malého), získáme vztah

$$
r = \frac{5}{3}r_a + r_b\,.
$$

Budeme-li konstruovat síť tak, že do rohů větších trojúhelníků budeme přidávat postupně menší, bude následně ekvivalentní odpor mezi dvěma vrcholy velkého trojúhelníku v i-tém kroku konstrukce splňovat vztah

$$
r_{i+1} = \frac{5}{3\alpha}r_i + \left(1-\frac{2}{\alpha}\right)r_0\,.
$$

kde koeficient $1/\alpha$ v prvním členu zohledňuje postupné zmenšování nově vzniklých menších trojúhelníků v rozích větších. V limitě nekonečně mnoha kroků můžeme položit $r_i = r_{i+1} = r_\mathrm{t}$,



Obr. 1: Přechod mezi zapojeními.

kde r_t je odpor strany rovnostranného trojúhelníka, kterým je možné celou síť nahradit. Z výše sestavené rovnice vychází

$$r_\mathrm{t} = \frac{3(1-\frac{2}{\alpha})}{3-\frac{5}{\alpha}} r_0$$

a pro $\alpha = 4$

$$r_\mathrm{t} = \frac{6}{7}\,\Omega\,.$$

Celkový odpor sítě mezi uzly poté bude

$$R = \frac{2}{3} r_\mathrm{t} = \frac{2(1-\frac{2}{\alpha})}{3-\frac{5}{\alpha}} r_0 = \frac{4}{7}\,\Omega\,.$$

Alternativní řešení

Nepoužijeme převod mezi trojúhelníkem a hvězdou ani limitu, ale superpozici obvodů. Nechť spodním drátem s odporem $r_1 = r_0\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)$ teče proud I_1 a dvěma šikmými dráty s odporem r_1 proud I_2. Představme si celý obvod jako superpozici obvodu bez spodného drátu a obvodu bez šikmých drátů - napětí v každém vrcholu je součtem napětí v obou obvodech. Pro celkové napětí mezi vrcholy A a B sestavíme rovnice

$$\begin{aligned}
V &= 2\left(\frac{I_1}{2} + I_2\right)\frac{R}{\alpha} + 2I_2 r_1 + I_2\frac{R}{\alpha}\,,\\
V &= 2\left(I_1 + \frac{I_2}{2}\right)\frac{R}{\alpha} + I_1 r_1\,,\\
V &= (I_1 + I_2)\,R\,.
\end{aligned}$$

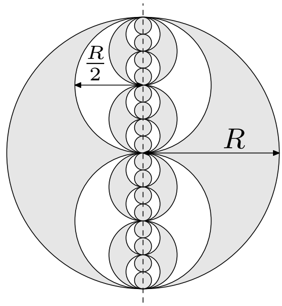
Odečtením prvních dvou rovnic máme $(2I_2 - I_1)\frac{r_t}{\alpha} = (I_1 - 2I_2)r_1$. Pro kladné odpory pak musí platit $I_1 = 2I_2 = \frac{2V}{3R}$; zpětným dosazením a dělením kladným V dostaneme stejný výsledek

$$R = \frac{2}{3 - \frac{5}{\alpha}} r_1 = \frac{2(1 - \frac{2}{\alpha})}{3 - \frac{5}{\alpha}} r_0 \,.$$

Radka Křížová
radka.krizova@fykos.cz

Úloha 36 ... koule pro Jáchyma 6 bodů

Postupnými kroky vytvoříme speciální kouli pro Jáchyma. Začneme s tím, že máme homogenní plnou kouli o poloměru R a hustotě materiálu ρ. Vybereme si jednu hlavní osu procházející středem koule. Z velké koule vyjmeme dvě koule, které mají poloměry $R/2$ a jejich středy leží na hlavní ose a jsou ve vzdálenostech $R/2$ od středu, tak, že vzniklé díry spolu těsně sousedí. Pak dovnitř přidáme 4 koule o poloměru $R/4$. Jejich středy leží na hlavní ose a koule umístíme vedle sebe. Stejným způsobem pokračujeme dále. Tedy do těchto menších koulí uděláme opět po dvou kulových dírách. Do těch pak dáme opět poloviční koule. Takto pokračujeme až do nekonečna. Jaký je poměr celkové hmotnosti koule pro Jáchyma oproti hmotnosti plné koule o poloměru R a stejné hustotě ρ?



Karel chtěl, aby i Jáchym dostal svou speciální kouli.

Uvědomme si, že v každém kroku přidáme/ubereme dvojnásobný počet koulí oproti předchozímu kroku. Tyto koule mají všechny poloviční poloměr, jejich celkový objem (a tedy, i díky konstantní hustotě, hmotnost) bude tedy $2 \cdot (1/2)^3$ objemu koulí přidaných/ubraných v předchozím kroku. Označíme-li M hmotnost koule, se kterou začínáme, dostaneme hmotnost koule pro Jáchyma jako součet nekonečné řady

$$m = M - \frac{M}{4} + \frac{M}{16} - \frac{M}{64} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} M \left(\frac{-1}{4}\right)^i \,,$$

což umíme sečíst pomocí

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \,,$$

jako

$$m = \frac{4}{5} M \,.$$

Protože chceme výsledek na tři platné číslice, je odpovědí 0,800.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 37 ... polarizace kam až jde 6 bodů

Karel se rozhodl dát 5 lineárních polarizátorů za sebe. Úhel mezi rovinami prvního a druhého zvolil α, další $\alpha - \pi/2$, pak zase α a tak dále. Jaká je největší intenzita světla, kterou může Karel takto získat, jestliže svítí na první polarizátor nepolarizovaným světlem o intenzitě I_0? Vyjádřete jako poměr I_{max}/I_0. *Petr se zamyslel nad skládáním polarizačních filtrů.*

Předpokládáme, že $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, protože zkoumáme pouze úhel mezi rovinami. Také si uvědomme, že nemohou nastat ani rovnosti, protože polarizační filtry, které jsou na sebe kolmé, odstíní 100 % záření.

Při dopadu na první polarizátor se světlo lineárně polarizuje, proto pozorujeme úbytek 1/2 intenzity. Dále, dopadne-li polarizované světlo na polarizační filtr pootočený o úhel α, můžeme intenzitu I' prošlého záření určit jako

$$I' = I\cos^2(\alpha)\ .$$

První polarizátor světlo jenom polarizuje, což jsme už popsali výše, zkoumejme nyní úbytky pouze na zbylých čtyřech polarizátorech. Tam můžeme užitím identity $\cos(\alpha - \pi/2) = -\sin(\alpha)$ pro celkovou naměřenou intenzitu I psát

$$I = \frac{I_0}{2}\cos^2(\alpha)\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos^2(\alpha)\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_0}{2}\cos^4(\alpha)\sin^4(\alpha)\ .$$

Zbývá nám tedy najít maximum tohoto výrazu. Zderivováním a položením rovno nule dostaneme

$$\cos^3(\alpha)\sin^3(\alpha)\left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right) = 0\,,$$

což je pro $0 < \alpha < \pi/2$ ekvivalentní s

$$\cos(2\alpha) = 0\,,$$

odkud $\alpha = \pi/4$. Teď už zbývá jenom dosadit a získáme

$$\frac{I_{\mathrm{max}}}{I_0} = \frac{1}{32} = 0{,}03125\,.$$

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 38 ... na procházce se psem 7 bodů

Jarda je na procházce se svým psem. Jdou po dlouhé rovné ulici. Jardova vzdálenost od plotů zahrad je 5,0 m a jeho pes je uvázán na vodítku délky 4,0 m. Již zdálky ví o svém kamarádovi Žerykovi, který spokojeně leží v boudě u plotu jedné ze zahrad, a těší se na společné štěkací setkání. Proto na vodítku vždy směřuje tak, aby byl Žerykovi co nejblíže. Jakou nejvyšší rychlostí se Jardův pes bude pohybovat? Jarda jde konstantní rychlostí $v = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Jarda vymýšlí úlohy i na procházce se svými psy.*

Zaveďme kartézský souřadnicový systém se středem v bodě, kde se nachází Jarda, když je Žerykovi nejblíže, tedy ve vzdálenosti 5 m kolmo na plot. Nechť $t = 0$ je právě v okamžiku, kdy Jarda prochází tímto místem. Jardův pes je tak od Žeryka právě 1 m.

V čase t je pak Jardova poloha $x = vt$. Určíme polohu Jardova psa. Ten je vždy na spojnici mezi Jardou a bodem $x = 0, y = D = 5\,\mathrm{m}$, kde je Žeryk. Vypočítáme úhel, který svírá tato spojnice s osou x. Platí

$$\sin\varphi = \frac{D}{\sqrt{D^2 + v^2t^2}}\,, \cos\varphi = \frac{vt}{\sqrt{D^2 + v^2t^2}}\,.$$

Pak je poloha Jardova psa

$$x_\mathrm{p} = vt - r\frac{vt}{\sqrt{D^2 + v^2t^2}}\,, y_\mathrm{p} = r\frac{D}{\sqrt{D^2 + v^2t^2}}\,.$$

Derivací podle času dostaneme složky jeho rychlosti

$$\dot{x}_\mathrm{p} = v\left(1 - \frac{r}{\sqrt{D^2 + v^2t^2}} + \frac{v^2t^2r}{\sqrt{D^2 + v^2t^2}^3}\right), \dot{y}_\mathrm{p} = -\frac{rDv^2t}{\sqrt{D^2 + v^2t^2}^3}\,.$$

Po umocnění a sečtení obou složek dostáváme

$$v_\mathrm{p}^2 = \frac{v^2}{\left(D^2 + v^2t^2\right)^2}\left(\left(D^2 + v^2t^2\right)^2 + r^2D^2 - 2rD^2\sqrt{D^2 + v^2t^2}\right)\,.$$

Výraz zderivujeme a položíme roven nule. Řešením této rovnice je buď $t = 0$, nebo vede na jednoduchou podmínku

$$3\sqrt{D^2 + v^2t^2} = 2r\,,$$

kterou ale nedokážeme splnit pro žádné reálné t. V čase $t = 0$ je rychlost psa zřejmě minimální, zatímco jiný extrém jeho rychlosti nenastává. Maximální rychlost tak bude mít pes v časech $t = \pm\infty$, a to $1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 39 ... řádový odhad střední výšky vzduchu 6 bodů

Mějme dutý válec s obsahem podstavy $S = 327\,\mathrm{cm}^2$, který je zespodu uzavřený a nahoru neomezeně vysoký. Celý válec je umístěný v homogenním poli s tíhovým zrychlením g. Naplníme jej dvojatomovými molekulami dusíku o teplotě $T_0 = 25\,^\circ\mathrm{C}$ tak, že vespod bude tlak $p_0 = 101\,\mathrm{kPa}$. Jaká bude střední výška těchto molekul nad spodní podstavou válce? Předpokládejme, že se dusík chová jako ideální plyn. *Lego zanedbal, co se jen dalo.*

Klasické riešenie

Samozrejme, budeme používať stavovú rovnicu ideálneho plynu $pV = NkT$. Z nej hneď vidíme, že v malej vrstve vzduchu výšky $\mathrm{d}h$, nachádzajúcej sa vo výške h, v ktorej je tlak $p = p(h)$, sa bude nachádzať

$$\mathrm{d}N(h) = \frac{p(h)\,S}{kT_0}\,\mathrm{d}h$$

molekúl. Keď zistíme, ako presne sa vyvíja tlak (a teda aj „dĺžková hustota“ častíc) s výškou, budeme môcť zistiť ich priemernú výšku ako

$$\langle h\rangle = \frac{\int_0^\infty h\,\mathrm{d}N(h)}{\int_0^\infty \mathrm{d}N(h)} = \frac{\int_0^\infty hp(h)\,\mathrm{d}h}{\int_0^\infty p(h)\,\mathrm{d}h}\,.$$

Máme zadaný tlak dole, potrebujeme teda nájsť nejaký (zrejme diferenciálny) vzťah pre pokles tlaku v smere nahor. Keď si vezmeme niektorú vrstvu molekúl a jej celkovú tiaž vydelíme plochou S, dostaneme tlak, akým tlačí na plyn pod sebou. O túto hodnotu bude tlak pod touto vrstvou väčší, než ten nad ňou.

Poďme prejsť od slov k rovniciam. Označme si hmotnosť jednej molekuly m. Potom popisovaný rozdiel tlakov bude

$$\mathrm{d}p = -\frac{mg}{S}\,\mathrm{d}N(h) = -\frac{mg}{kT_0}p(h)\,\mathrm{d}h\,.$$

To je diferenciálna rovnica, ktorú môžeme riešiť jednoducho pomocou separácie premenných. Treba si však dať pozor na správne znamienko – tlak bude s rastúcou výškou klesať! Riešime teda rovnicu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\,\mathrm{d}p &= -\frac{mg}{kT_0}\,\mathrm{d}h\,,\\
\int_{p_0}^{p(h)} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}p &= \int_0^h -\frac{mg}{kT_0}\,\mathrm{d}h\,,\\
\ln\left(\frac{p(h)}{p_0}\right) &= -\frac{mgh}{kT_0}\,,\\
p(h) &= p_0\exp\left(-\frac{mgh}{kT_0}\right)\,.
\end{aligned}$$

Dostávame, že tlak bude s výškou klesať exponenciálne. Dosadíme získaný vzťah do vzorca pre priemernú výšku, ktorý sme si uviedli vyššie

$$\langle h\rangle = \frac{\int_0^\infty p_0 h\exp\left(-\frac{mgh}{kT_0}\right)\mathrm{d}h}{\int_0^\infty p_0\exp\left(-\frac{mgh}{kT_0}\right)\mathrm{d}h} = \frac{\left(\frac{kT_0}{mg}\right)^2}{\frac{kT_0}{mg}} = \frac{kT_0}{mg} = 9020\,\mathrm{m}\,.$$

Stredná výška molekúl nad spodnou podstavou valca je teda 9015 m. Môžeme si všimnúť, že vôbec nezávisí na p_0. To dáva zmysel, keďže jedna zo základných vlastností ideálneho plynu je, že molekuly sa navzájom neovplyvňujú. Čiže bez ohľadu na to, koľko ich tam pridáme, priemernú výšku nezmeníme... Až by sa niekto mohol spýtať, či sa to celé nedalo spočítať jednoduchšie. Odpoveď je, že dalo.

Štatistické riešenie

Asi najznámejší vzťah zo štatistickej fyziky je Boltzmanovo rozdelenie. To nám hovorí, že pravdepodobnosť toho, že nejaký stupeň voľnosti (napríklad výška jednej molekuly h) bude mať nejakú hodnotu, je úmerná $\exp(-E/kT)$, kde E je energia prislúchajúca tejto hodnote. V tomto prípade je to potenciálna energia molekuly, čiže $E(h) = mgh$. Potom priemernú výšku jednej molekuly získame okamžite ako

$$\langle h \rangle = \frac{\int_0^\infty h \exp\left(-\frac{mgh}{kT_0}\right) \mathrm{d}h}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{mgh}{kT_0}\right) \mathrm{d}h} \,.$$

Vidíme, že dostávame rovnaké integrály ako na konci klasického riešenia. Menovateľ (nazývaný aj stavová suma Z) je tam opäť kvôli normovaniu.

Nakoniec dodáme, že výsledok v rádoch vyšších tisícov metrov celkom dáva zmysel, ak si uvedomíme, že na Mount Everest sa už zvykne loziť s kyslíkovými prístrojmi, ale je možné ho vyliezť aj bez nich. Takže charakteristická výška vzduchu by sa rádovo mohla pohybovať okolo 8000 m.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 40 ... moderní umění 7 bodů

Máme 2 kvádry, jeden s hmotností $M = 9{,}50\,\mathrm{kg}$ a druhý s hmotností m. Ten druhý zvedneme a přitlačíme ho ke stěně prvním, který stojí na zemi. Jaká je největší možná hmotnost m, aby druhý kvádr nespadl, když mezi kvádry, kvádrem a stěnou i kvádrem a zemí je koeficient smykového tření $f = 0{,}288$? Předpokládejme, že kvádr stojící na zemi je dost dlouhý, aby se nepřevrátil dozadu. *Lego fakt nevěděl, jak pojmenovat tuto úlohu.*

Kváder s hmotnosťou m tlačia nahor iba sily trenia, a to medzi kvádrom a stenou a medzi dvoma kvádrami navzájom. Trecia sila sa dá spočítať ako koeficient trenia f (ktorý je pre všetky dvojice povrchov v tejto úlohe rovnaký) násobený normálovou silou, ktorá tlačí tieto 2 povrchy k sebe. Keďže kvádre sa zjavne nepohybujú vo vodorovnom smere, musia byť sily v tomto smere vyvážené. Teda normálová sila na jednej strane zdvihnutého kvádra musí byť rovnaká ako na druhej. Ak si označíme túto silu F_1, tak trecia sila na každej strane bude $F_{\mathrm{t1}} = fF_1$. Súčet trecích síl musí vykompenzovať tiaž kvádra, čiže $mg = 2F_{\mathrm{t1}}$. Odtiaľ môžeme vyjadriť silu, ktorou na seba kvádre tlačia, ako $F_1 = mg/(2f)$.

Z Newtonovho 3. zákona vyplýva, že kváder M je odtláčaný silou F_1. Aby zostal stáť, musí naň pôsobiť rovnako veľká sila opačným smerom. Jediná ďalšia sila, ktorá naň pôsobí vo vodorovnom smere, je trecia sila od zeme. Jej veľkosť preto musí byť rovná F_1 a opäť si ju môžeme vyjadriť ako f násobené normálovou silou. Tu ale prichádza najzákernejšia časť úlohy – normálová sila nebude iba Mg, ale navyše znova zaúraduje 3. Newtonov zákon. Trecia sila medzi kvádrami pôsobí ako na káder držaný vo vzduchu, tak aj na kváder hmotnosti M, ktorý ho tam drží (a to isté platí aj pre stenu).

Takže $F_2 = Mg + F_{\mathrm{t1}} = Mg + mg/2$, a potom trecia sila medzi zemou a kvádrom je $F_{\mathrm{t2}} = fg(M + m/2)$. Položíme túto treciu silu rovnú F_1 a dostávame rovnicu pre maximálne m, pri ktorom pritlačený kváder ešte nespadne

$$
\begin{aligned}
F_1 &= F_{\mathrm{t}2} \\
\frac{mg}{2f} &= fg\left(M + \frac{m}{2}\right) \\
\frac{m}{f} - fm &= 2fM \\
m &= 2M\frac{1}{\frac{1}{f^2} - 1} = 1{,}72\,\mathrm{kg}\,,
\end{aligned}
$$

ze ktoré

$$m = 2M\frac{1}{\frac{1}{f^2} - 1} = 1{,}72\,\mathrm{kg}\,.$$

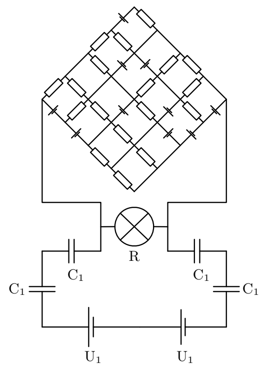
Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha 41 ... odporné bludiště

6 bodů

Všechny odpory (včetně žárovky) v obvodu na obrázku mají hodnotu $R = 1{,}0\,\Omega$, kondenzátory mají kapacitu $C = 1{,}0\,\mathrm{F}$ a všechny zdroje stejnosměrné napětí $U = 1{,}0\,\mathrm{V}$. Vypočítejte proud procházející žárovkou po ustálení.

Marek J. při procházce narazil na odpor.



Symetria zadania nám prirodzene rozdeľuje obvod na hornú a dolnú časť. Dolná časť sa skladá zo zdroja napätia a kondenzátorov. Vieme, že kondenzátormi jednosmerný prúd tiecť nebude. Preto po prvotnom nabíjaní kondenzátorov a preskupovaní náboja tak, aby kompenzoval napätie, sa situácia ustáli (nulový prúd), a dolnú časť obvodu môžeme v našej analýze úlohy ignorovať.

Horná časť je však skutočne bludiskom odporov a bateriek (teda zdrojov). Po chvíľke blúdenia však môžeme vidieť, že pre elektrický prúd existuje cesta najmenšieho odporu! A to doslova. Ide o časť obvodu, na ktorej sa nachádzajú iba baterky (a „prázdne“ časti s vodičom). Baterky majú rôzne orientovanú polaritu, ale keďže hodnota ich napätia je vždy rovnaká a nemenná, celkové napätie na danej časti obvodu je nakoniec jednoduchým súčtom kladných a záporných napätí.

Pohľadom na zadanie dostávame celkovú hodnotu napätia $U_\mathrm{c} = 3\,\mathrm{V}$. Slučka s najmenším odporom v obvode je jednoznačná a dotváraná paralelne zapojenou žiarovkou. Z Kirchhoffovho druhého zákona tak poznáme napätie na žiarovke, ktoré je rovné spomínaným trom voltom. Nakoniec použitím Ohmovho zákona spočítame prúd žiarovkou ako

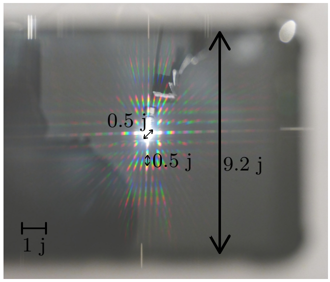
$$I = \frac{U_\mathrm{c}}{R} = 3{,}0\,\mathrm{A}\,.$$

Marek Jankola
marekj@fykos.cz

Úloha 42 ... rozlišení displeje 8 bodů

Jarda si všiml difrakce na svém mobilním telefonu. Pokusil se proto vypočítat velikost jednotlivých pixelů, které považoval za čtvercové. Mobil položil 1,05 m *pod světlo o velikosti* 1,5 cm *a odraz na displeji vyfotil foťákem, jehož objektiv byl nad ním ve výšce* 40 cm*. Na fotografii byla šířka displeje* 9,2 j*, průměr světla* 0,5 j *a vzdálenost žlutých maxim* 0,5 j*, kde* 1 j *je měřítko na fotce. Displej Jardova mobilu má rozměry* 13 cm *a* 7,5 cm*. Kolik se na něm nachází pixelů?*

Jarda zadal experimentálku do FOLu.



Nejprve si uvědomme, že displej mobilu bude fungovat jako difrakční mřížka, zároveň ale také jako zrcadlo, které zdroj zobrazí „za displej“. Z rovnice mřížky

$$d \sin \alpha = k\lambda$$

dopočítáme mřížkovou konstantu (tedy velikost pixelu) d. Protože pracujeme v malých úhlech, použijeme aproximaci $\alpha \approx \sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ a budeme měřit úhel $\Delta\alpha$ mezi dvěma sousedními maximy. Pak dostaneme

$$d = \frac{\lambda}{\Delta\alpha}\,,$$

kde $\lambda = 580\,\mathrm{nm}$ je vlnová délka žluté barvy.

Jediným problémem tak zůstává určení $\Delta\alpha$ z geometrie aparatury a fotografie. K tomu použijeme zadané délky důležitých objektů na fotografii a známou šířku mobilu. Mobil tvoří zrcadlo, takže si můžeme představit, že zdroj světla máme za ním a displej funguje jen jako difrakční mřížka. Uvažujme, že ze světla jdou rovnoběžné paprsky zezadu na displej, kde se kvůli difrakci a interferenci odchýlí. Proto nás zajímá jen to, co se děje před displejem.

Objektiv fotoaparátu považujme za optickou soustavu, která zobrazí přicházející paprsky na čip. Pro jednoduchost nahradíme objektiv v nákresu čočkou s ohniskovou vzdáleností f. Čip je v takové rovině za ohniskem, aby byl obraz zaostřený. Je známým faktem, že poloha obrazu za optickou soustavou (tedy poloha na fotografii) je úměrná úhlu, pod kterým paprsky do soustavy vstupují (alespoň v aproximaci geometrické optiky). Protože nemusíme mít střed mobilu přesně na optické ose, budeme používat jen rozdíly úhlu a rozdíly vzdáleností na fotografii. Ze znalosti reálné šířky mobilu a její velikosti na fotografii najdeme konstantu úměrnosti, kterou využijeme pro výpočet $\Delta\alpha$.

Rozdíl úhlů, který svírají paprsky jdoucí z obou hran mobilu, je

$$\beta = \frac{s}{h} = \frac{7{,}5\,\mathrm{cm}}{40\,\mathrm{cm}}\,,$$

kde s je šířka mobilu a h je výška objektivu nad displejem. Tomuto úhlu je úměrná šířka displeje na fotce $s_\mathrm{f} = 9{,}2\,\mathrm{j}$.

Nyní uvažujme paprsky ze dvou sousedních žlutých maxim. Rozdíl jejich úhlů (vůči např. optické ose) je právě $\Delta\alpha$. Tomuto rozdílu úhlů je zase úměrná vzdálenost na fotce $s_\text{ž} = 0{,}5\,\mathrm{j}$. Proto můžeme dát do poměru úhly β a $\Delta\alpha$ s pozicemi na fotografii a máme

$$\frac{s_\mathrm{f}}{\beta} = \frac{s_\text{ž}}{\Delta\alpha}\,.$$

Již dříve jsme si z reálných rozměrů objektů vyjádřili β. Nyní tedy máme připravené všechno pro to, abychom dopočítali d jako

$$d = \lambda \frac{s_\mathrm{f}}{s_\mathrm{ž}\beta} = \lambda \frac{h s_\mathrm{f}}{s_\mathrm{ž} s} = 57\,\mathrm{\mu m}\,,$$

kde $\lambda = 580\,\mathrm{nm}$ je vlnová délka žlutého světla.

Počet těchto jednotek na celém displeji je tak dán poměrem plochy celého displeje, která je sv, kde $v = 13\,\mathrm{cm}$, a plochy jednoho pixelu d^2. Číselně vychází

$$N = \frac{sv}{d^2} = 3{,}0 \cdot 10^6\,.$$

V zadání jsme oproti experimentu upravili rozměry displeje z 12,8 cm a 6,4 cm. S těmito hodnotami bychom dostali výsledek $1{,}9 \cdot 10^6$. Udávané rozlišení mobilu je 2160 na 1080, čili je na něm $2{,}3 \cdot 10^6$ pixelů. Rozdíl mezi těmito hodnotami plyne z chyby změření výšky h nebo z aproximace průchodů paprsků objektivem.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 43 ... drátová 7 bodů

Dva sousední stožáry elektrické přenosové soustavy jsou v rovinné krajině vzdáleny $s = 400\,\mathrm{m}$. Jeden z drátů mezi nimi je na obou svých koncích upevněn ve výšce $H = 20\,\mathrm{m}$ nad zemí. V zimě při teplotě vzduchu $t_\mathrm{z} = -10\,\mathrm{^\circ C}$ je v důsledku průvěsu nejnižší bod drátu ve výšce $h_\mathrm{z} = 19\,\mathrm{m}$. Jak vysoko nad zemí bude tento bod v létě, kdy je teplota $t_\mathrm{l} = 20\,\mathrm{^\circ C}$? Součinitel teplotní roztažnosti oceli, ze které je vodič vyroben, je $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$. Prodloužení vlivem vlastní tíhy pro jednoduchost zanedbáme. *Matěj Rz byl venku.*

Je známým faktem, že tvar prověšeného drátu odpovídá tzv. řetězovce, tedy křivce popsané jako

$$r(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\,,$$

kde a je parametr určující „míru průvěsu“, vrchol řetězovky je tedy definován jako bod $[0, a]$. Dále budeme potřebovat umět určit délku řetězovky – tu nalezneme buď řešením jednoduchého integrálu,[2] nebo to také prohlásíme za známé tvrzení. Protože je problém symetrický, bude délka naší řetězovky odpovídat

$$d = a \sinh\left(\frac{b}{2a}\right) - a \sinh\left(\frac{-b}{2a}\right) = 2a \sinh\left(\frac{b}{2a}\right)\,,$$

kde b označuje vzdálenost mezi jednotlivými konci řetězovky. Zavedeme tedy přirozený souřadný systém s osou x rovnoběžnou se zemí a osou y rovnoběžnou se stožáry, jeho počátek umístíme do vzdálenosti a „pod“ vrchol řetězovky. Toto nám dává přirozený způsob, jak pracovat s řetězovkou pomocí výše popsaného.

Určíme délku řetězovky v zimě. Platí $b = s$ a $r(b/2) = a + H - h_\mathrm{z}$. Z těchto údajů již umíme určit parametr a a následně délku d. Rovnici pro a, ale bohužel musíme řešit numericky

$$a + H - h_\mathrm{z} = a \cosh\left(\frac{s}{2a}\right) \quad \Rightarrow \quad a \doteq 20\,000{,}166\,7\,\mathrm{m}\,,$$

[2] $\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (a \cosh'(x/a))^2}\,\mathrm{d}x$

odkud potom

$$d = 2a \sinh\left(\frac{s}{2a}\right) \doteq 400{,}007\,\mathrm{m}\,.$$

Délku d' v létě určíme snadno jako

$$d' = \left(1 + \alpha(t_\mathrm{l} - t_\mathrm{z})\right) d = \left(1 + \alpha(t_\mathrm{l} - t_\mathrm{z})\right) 2a \sinh\left(\frac{s}{2a}\right)$$

Pro určení nejnižšího bodu drátu musíme nyní zpětně aplikovat tentýž postup, co výše. Nejprve zavedeme souřadný systém s počátkem v bodě $[0, a']$, určíme numericky z nové délky řetězovky parametr a' a nakonec dopočteme výšku h_l rozdílem $H - (r'(b/2) - a')$, kde $r'(x)$ popisuje tvar řetězovky v létě. Platí

$$2a' \sinh\left(\frac{s}{2a'}\right) = \left(1 + \alpha(t_\mathrm{l} - t_\mathrm{z})\right) 2a \sinh\left(\frac{s}{2a}\right)\,,$$

což musíme sice znovu řešit numericky, ale poměrně přímočaře dostaneme

$$a' \doteq 4\,049{,}097\,\mathrm{m}\,.$$

Nakonec můžeme psát

$$h_\mathrm{l} = H - a' \cosh\left(\frac{s}{2a'}\right) + a' \doteq 15{,}1\,\mathrm{m}\,.$$

Mezivýsledky jsme v našem řešení zaokrouhlovali, zatímco do konečného vztahu jsme dosadili hodnoty s přesností na více platných cifer.

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Úloha 44 ... elektromagnet 8 bodů

Vezměme si dlouhou tenkou tyč z materiálu s vysokou relativní permeabilitou $\mu_r = 7\ 000$. Okolo tyče omotáme drát, takže získáme solenoid s $N = 1\ 000$ závity. Nyní solenoid ohneme do kruhu tak, že protější konce tyče se téměř dotýkají, ale necháme mezi nimi úzkou mezeru o tloušťce $s = 1{,}00\,\mathrm{mm}$. Tato vzdálenost je malá oproti poloměru kruhu $r = 20{,}0\,\mathrm{cm}$ i vůči poloměru tyče. Jestliže drátem teče proud $I = 500\,\mathrm{mA}$, určete velikost magnetické indukce v mezeře. *Jindra ukradl úlohu ze skript.*

Z Maxwellových rovnic je možné dokázat spojitost kolmé složky magnetické indukce $\mathbf{B}$ a rovnoběžné složky intenzity magnetického pole $\mathbf{H}$ na rozhraní dvou materiálů (důkaz viz níže).

Magnetická indukce je v místě mezery kolmá na povrch tyče, takže v mezeře bude magnetická indukce B stejná jako všude jinde v solenoidu. Magnetická intenzita v jádru cívky je H_in a magnetická intenzita v mezeře je H_m. Víme, že platí $\mu_r \mu_0 H_\mathrm{in} = \mu_0 H_\mathrm{m} = B$.

Poloměr tyče je zanedbatelný oproti poloměru kruhu r. Křivkový integrál podél jádra cívky běžící po kružnici s poloměrem r dá

$$\begin{aligned} NI &= \oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}\,, \\ NI &= H_{\mathrm{in}}(2\pi r - s) + H_{\mathrm{m}} s\,, \\ NI &= \frac{B}{\mu_r \mu_0}(2\pi r - s) + \frac{B}{\mu_0} s\,, \\ B &= \frac{\mu_r \mu_0 N I}{2\pi r + (\mu_r - 1)s} = 0{,}533\,\mathrm{T} \approx 0{,}53\,\mathrm{T}\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že magnetické pole v mezeře je v této aproximaci určeno šířkou mezery a je výrazně zesíleno oproti situaci, kdy bychom použili cívku bez jádra (pro cívku bez jádra použijeme stejný vztah, kam dosadíme $\mu_r = 1$ a $s = 0\,\mathrm{mm}$, a dostaneme $B' = 5{,}00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T} \ll B = 0{,}533\,\mathrm{T}$).

Důkaz spojitosti kolmé složky $\mathbf{B}$ *a tečné složky* $\mathbf{H}$ *na rozhraní*

K důkazu použijeme dvě z Maxwellových rovnic pro magnetické pole

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0, \qquad \oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I + \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

První rovnice říká, že neexistují žádné magnetické monopóly. Druhá rovnice dává do souvislosti křivkový integrál intenzity magnetického pole s proudem protékajícím onou uzavřenou křivkou a časovou změnou toku elektrické indukce $\mathbf{D}$.

Vezměme si dva dotýkající se různé materiály s relativními magnetickými permeabilitami μ_1 a μ_2. Přibližme si pohled na malý úsek jejich kontaktní plochy, takže můžeme zanedbat zakřivení rozhraní a považovat kontakt za rovinu.

Okolo rovinného rozhraní vytvoříme Gaussovu plochu – kvádr, jehož jedna základna leží v materiálu 1 a druhá základna leží v materiálu 2. Základny s plochou A jsou rovnoběžné s rozhraním materiálů. Kvádr má zanedbatelnou výšku h (viz obrázek vlevo). Z rovnice pro neexistenci magnetických monopólů odvodíme, že kolmá složka vektoru magnetické indukce je na rozhraní libovolných dvou materiálů spojitá

$$\begin{aligned} 0 &= \oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \approx A\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + A\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = -AB_{1,\perp} + AB_{2,\perp}\,, \\ B_{1,\perp} &= B_{2,\perp}\,. \end{aligned}$$

Při odvození jsme zanedbali tok magnetické indukce bočními stěnami kvádru, pracovali jsme v limitě $h \to 0$. Takto jsme dokázali skutečnost, na které závisí řešení úlohy. Pro zajímavost ještě odvodíme i spojitost tečné složky vektoru magnetické intenzity.

Abychom dokázali, že tečná složka vektoru magnetické intenzity je na rozhraní spojitá, nakreslíme okolo rozhraní uzavřenou křivku – obdélník s délkou a a se zanedbatelnou výškou h. Strany o délce a jsou rovnoběžné s rozhraním (viz obrázek vpravo). K důkazu použijeme rovnici

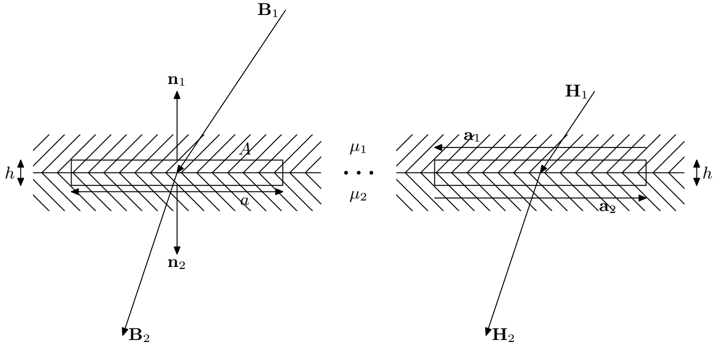
$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I + \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Jestliže pošleme výšku h limitně do nuly, proud I protékající obdélníkem i tok magnetické indukce $\int (\partial \mathbf{D}/\partial t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ půjdou taktéž do nuly. To vyplývá z toho, že jsou oba úměrné ploše obdélníku, která jde limitně do nuly. Avšak integrál $\oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl}$ na levé stramě zůstává, ten závisí na obvodu obdélníku, který zůstává nenulový

$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0 \approx \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = aH_{1,\parallel} - aH_{2,\parallel}\,,$$

$$H_{1,\parallel} = H_{2,\parallel}\,.$$

Zanedbán byl příspěvek od svislých stran obdélníku, neboť jejich výšku h jsme poslali do nuly.



Obr. 2: K důkazu spojitosti tečných a normálových složek.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 45 ... žebříková — 7 bodů

Žebřík opřený o zeď má délku $l = 5\,\mathrm{m}$ a hmotnost $m = 10\,\mathrm{kg}$, přičemž jeho těžiště se nachází přesně v jeho polovině. Jindra se na něm drží tak, že má těžiště ve vzdálenosti $h = 4\,\mathrm{m}$ podél žebříku směrem od země a $x = 30\,\mathrm{cm}$ kolmo na něj. Jindrova hmotnost je $M = 70\,\mathrm{kg}$. Koeficient smykového tření mezi žebříkem a podlahou je $f_1 = 0{,}4$, zatímco mezi žebříkem a zdí je $f_2 = 0{,}6$. Spočítejte maximální úhel, který může žebřík svírat se svislou stěnou, aby s Jindrou nezačal padat. *Jindra maloval stěny v pokojíčku.*

Úloha je komplikovaná množstvím údajů. Rozebereme si všechny působící síly. Na styku se zemí působí na žebřík kolmo vzhůru tlaková síla N_1 (velikost neznáme) a směrem ke stěně třecí síla T_1 (velikost neznáme). V místě dotyku se stěnou působí na žebřík kolmo od stěny tlaková síla N_2 (velikost neznáme) a směrem vzhůru třecí síla T_2 (velikost neznáme). Na Jindru působí směrem dolů tíhová síla Mg, kde g je tíhové zrychlení, a na žebřík působí směrem dolů tíhová síla mg.

Jestliže má být soustava Jindra a žebřík v rovnováze, musí být součet všech sil a součet všech momentů sil nulový

$$(M + m)g = N_1 + T_2\,,$$

$$T_1 = N_2\,,$$

$$Mg(h\sin\alpha - x\cos\alpha) + mg\frac{l}{2}\sin\alpha = lT_2\sin\alpha + lN_2\cos\alpha\,,$$

$$Mg(l\sin\alpha - h\sin\alpha + x\cos\alpha) + mg\frac{l}{2}\sin\alpha + lT_1\cos\alpha = lN_1\sin\alpha\,.$$

První rovnice je rovnováha sil ve svislém směru, druhá rovnice je rovnováha sil ve vodorovném směru, třetí rovnice je rovnováha momentů sil vzhledem k bodu dotyku žebříku se zemí a čtvrtá rovnice je rovnováha momentů sil vzhledem k bodu dotyku žebříku se stěnou. V soustavě čtyř rovnic je pět neznámých, síly N_1, T_1, N_2, T_2 a úhel α. Nás ale zajímá konkrétní maximální hodnota úhlu $\alpha = \alpha_{\max}$, při které žebřík začne sklouzávat.

Zamysleme se, co se v tu chvíli stane. V kritickém okamžiku žebřík začne klouzat po zemi i podél stěny. To znamená, že ani jedna ze třecích sil T_1, T_2 nejsou schopny zabránit pohybu žebříku. Maximální velikosti třecích sil jsou $T_1 = f_1N_1$ a $T_2 = f_2N_2$. Tyto dvě rovnosti tedy platí při největším možném úhlu $\alpha_{\max}$. Naše čtyři rovnice se zredukují na dvě (využijeme toho, že platí $T_2 = f_2N_2 = f_1f_2N_1$)

$$(M+m)g = (1 + f_1f_2)N_1\,,$$

$$Mg(h\sin\alpha_{\max} - x\cos\alpha_{\max}) + mg\frac{l}{2}\sin\alpha_{\max} = lf_1f_2N_1\sin\alpha_{\max} + lf_1N_1\cos\alpha_{\max}.$$

Z první rovnice vyjádříme N_1 a dosadíme do druhé rovnice

$$Mg(h\sin\alpha_{\max} - x\cos\alpha_{\max}) + mg\frac{l}{2}\sin\alpha_{\max} = \frac{f_1l(M+m)g}{1+f_1f_2}\left(f_2\sin\alpha_{\max} + \cos\alpha_{\max}\right),$$

pokrátíme g a převedeme členy se siny a členy s kosiny k sobě

$$\left(Mx + \frac{f_1l(M+m)}{1+f_1f_2}\right)\cos\alpha_{\max} = \left(Mh + m\frac{l}{2} - \frac{f_1f_2l(M+m)}{1+f_1f_2}\right)\sin\alpha_{\max}\,.$$

Rovnici podělíme $\cos\alpha_{\max}$ (nebojíme se dělení nulou) a dostáváme

$$\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \frac{Mx + \frac{f_1l(M+m)}{1+f_1f_2}}{Mh + m\frac{l}{2} - \frac{f_1f_2l(M+m)}{1+f_1f_2}} \doteq 33{,}4\,^\circ\,.$$

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 46 ... na houbách 7 bodů

Jarda šel do dubového lesa sbírat bedly. Fouká ale docela silný vítr, takže ze stromů padají žaludy s frekvencí na jednotku plochy $N = 1{,}0\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^{-2}{\cdot}s^{-1}}$. Plocha, kterou Jarda běžně zabírá, je $A = 1\,100\,\mathrm{cm^2}$. Jaká je pravděpodobnost, že ho nějaký z žaludů trefí, pokud má v plánu v lese sbírat $t = 35\,\mathrm{min}$? *Jardu trefil na houbách žalud třikrát po sobě!*

Ze zadání můžeme přímo určit střední hodnotu počtu žaludů, které spadnou na Jardu za oněch 35 minut jako

$$\lambda = NAt\,.$$

Potom si stačí uvědomit, že pád žaludu je nezávislý jev a počet nezávislých jevů za jednotku času je modelován Poissonovým rozdělením. To říká, že pro náhodnou veličinu X se střední hodnotou počtu výskytů λ je pravděpodobnost x výskytů

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \mathrm{e}^{-\lambda} \,.$$

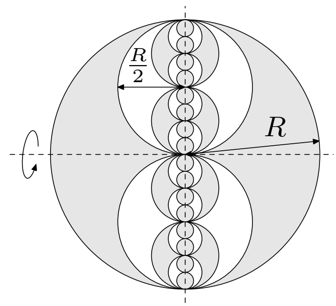
Pravděpodobnost, že na Jardu spadne alespoň jeden žalud, pak určíme jako

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \doteq 0{,}023 \,.$$

Můžeme tvrdit, že tato úloha nemá s fyzikou moc společného, ale použitý matematický model – sledování nezávislých jevů – je důležitou součástí jaderné nebo obecně statistické fyziky.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 47 ... koule pro Jáchyma reloaded — 7 bodů



Postupnými kroky vytvoříme speciální kouli pro Jáchyma. Začneme s tím, že máme homogenní plnou kouli o poloměru R a hustotě materiálu ρ. Vybereme si jednu hlavní osu procházející středem koule. Dále z velké koule vyjmeme dvě koule, které mají poloměry $R/2$, jejichž středy leží na hlavní ose a jsou ve vzdálenostech $R/2$ od středu, tak, že vzniklé díry spolu těsně sousedí. Pak dovnitř přidáme 4 koule o poloměru $R/4$. Jejich středy opět leží na hlavní ose a koule umístíme vedle sebe. Stejným způsobem pokračujeme dále. Tedy do těchto menších koulí uděláme opět po dvou kulových dírách. Do těch pak dáme opět poloviční koule. Takto pokračujeme až do nekonečna. Jaký má Jáchymova koule moment setrvačnosti vůči kolmici na hlavní osu? Vyjádřete jako poměr ku momentu setrvačnosti plné koule o poloměru R a stejné hustotě ρ.

Karel (i Vojta a druhý Vojta) si myslí, že Jáchym si nezaslouží kouli jednou, ale dvakrát.

Moment setrvačnosti koule o hmotnosti m a poloměru r rotující okolo osy procházející jejím středem odpovídá vztahu

$$J = \frac{2}{5} m r^2 \,.$$

K řešení úlohy budeme kromě znalosti, že momenty setrvačnosti těles rotujících vzhledem ke stejné ose můžeme sčítat za účelem zisku celkového momentu setrvačnosti,[3] potřebovat také Steinerovu větu. Ta říká, že posuneme-li osu otáčení tuhého tělesa procházející těžištěm o hmotnosti m do vzdálenosti r, změní se moment setrvačnosti z J na

$$J' = J + m r^2 \,.$$

Abychom nemuseli pracně sčítat geometrickou řadu, uvědomíme si, že můžeme využít rekurenci celé situace. Konkrétně je Jáchymova koule složená z jedné velké koule o poloměru R,

[3] To plyne triviálně z faktu, že moment setrvačnosti je integrálem kvadrátu vzdálenosti od osy otáčení přes celou hmotnost tělesa.

v níž jsou vyhloubeny dvě kulové dutiny, ve kterých se nacházejí čtyři menší Jáchymovy koule (o čtvrtinovém poloměru), jejichž středy jsou vzdálené $R/4$ a $3R/4$ od středu původní koule.

Než se dáme do samotného výpočtu, zbývá nám zamyslet se, jak se změní moment setrvačnosti tělesa zmenšeného s faktorem α (při zachování konstantní hustoty). Moment setrvačnosti závisí na kvadrátu vzdálenosti od osy otáčení a na hmotnosti, která je úměrná třetí mocnině velikosti.[4] Zmenšíme-li tedy všechny rozměry tělesa úměrně koeficientu α, moment setrvačnosti klesne jako α^5. Jáchymova koule o čtvrtinovém poloměru proto bude mít moment setrvačnosti $1/4^5$ původního momentu.

Nakonec budeme také potřebovat hmotnosti Jáchymových koulí čtvrtinových rozměrů. Z úlohy „koule pro Jáchyma" víme, že hmotnost celé, velké Jáchymovy koule je $4M/5$, proto bude hmotnost zmenšených koulí rovna $M/80$ (tedy $1/4^3$ hmotnosti původní koule, neboť hmotnost klesá se třetí mocninou „velikosti").

Nyní už můžeme konečně počítat. Pro hledaný moment setrvačnosti Jáchymovy koule J bude platit

$$J = \frac{2}{5}MR^2 - 2\left(\frac{2}{5}\frac{M}{8}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{M}{8}\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) + 2\left(\frac{J}{4^5} + \frac{M}{80}\left(\frac{R}{4}\right)^2\right) + 2\left(\frac{J}{4^5} + \frac{M}{80}\left(\frac{3R}{4}\right)^2\right),$$

neboť musí být roven momentu setrvačnosti plné koule bez momentů setrvačností dvou menších koulí o polovičním poloměru naopak zvýšený o momenty setrvačností čtyř malých Jáchymových koulí – vše je upraveno pomocí Steinerovy věty. Vyřešením této rovnice pak dostaneme

$$J = \frac{28}{85}MR^2 = \frac{14}{17}J_0\,,$$

kde $J_0 = 2/5MR^2$ je moment setrvačnosti plné koule. Odpovědí na otázku ze zadání je proto $14/17 \doteq 0{,}82$.

Můžeme si mimochodem uvědomit, že stejného výsledku dosáhneme, když od plné koule pomocí Steinerovy věty „odečteme" dvě koule pro Jáchyma polovičních rozměrů.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 48 ... nahorů a dolů

8 bodů

Pingpong se hraje s míčky o průměru $d = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ a hmotnosti $m = 2{,}7\,\mathrm{g}$. Jarda po prohraném zápasu jeden takový vzal a ze vzteku ho odpálil přesně kolmo vzhůru. Míček vyletěl do výšky $H = 8{,}5\,\mathrm{m}$. Určete poměr času, kdy míček stoupal vzhůru, ku času, kdy padal dolů.

Jarda zkoušel trefit pingpongovým míčkem okno na koleji, ale nedostřelil.

Hned na začátku úlohy je důležité si uvědomit, že pingpongový míček není hmotný bod, a je tedy zapotřebí započítat odporovou sílu vzduchu. Tu budeme mít pro celou úlohu ve tvaru

$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2}CS\rho v^2\,,$$

kde označení jednotlivých veličin bude dále vysvětleno. Odporová síla závisí na druhé mocnině rychlosti v, protože pohyb míčku ve vzduchu je dostatečně rychlý na to, aby docházelo k turbulentnímu obtékání.

[4] Přesněji se jedná o integrál čtverce vzdálenosti od osy otáčení přes hmotnost.

Je zřejmé, že míček dolů poletí déle než nahoru, protože urazí stejnou vzdálenost, ale jeho průměrná rychlost bude kvůli disipaci energie vlivem odporové síly nižší.

Dráhu si rozdělíme na dvě části - let nahoru a let dolů, pro obě máme rozdílné pohybové rovnice. Postup jejich řešení necháváme zvídavému čtenáři jako domácí cvičení, zde uvádíme jenom potřebné výsledky. Postup řešení lze též dohledat na internetu nebo použít některý z výpočetních softwarů.
Pohybová rovnice pro let směrem vzhůru je

$$ma = -(mg + kv^2)\,,$$

kde m je hmotnost míčku, g tíhové zrychlení, a zrychlení míčku, v jeho rychlost a $k = CS\rho/2$ je konstanta. Zde $S = \pi d^2/4$, ρ je hustota vzduchu a $C = 0{,}5$ pro kouli. Jestliže rychlost orientujeme nahoru, je zrychlení směrem vzhůru záporné.
Řešením této rovnice je

$$v = \sqrt{\frac{gm}{k}}\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,(T-t)\right)\,,$$

kde T je čas, kdy v je nulová, tedy míček je v tomto čase na vrcholu své cesty. Integrací dostáváme

$$h = \frac{m}{k}\log\cos\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,(T-t)\right) + K\,.$$

Z počáteční podmínky, kdy v $t = 0$ je $h = 0$ dostáváme hodnotu integrační konstanty K jako

$$K = -\frac{m}{k}\log\cos\left(T\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)\,.$$

Dosazením v čase $t = T_1$ dostáváme

$$H = -\frac{m}{k}\log\cos\left(T_1\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)\,,$$

odkud vyjídříme čas T_1 jako

$$T_1 = \sqrt{\frac{m}{gk}}\arccos e^{\frac{-kH}{m}}\,.$$

Pro pád dolů má pohybová rovnice tvar

$$ma = mg - kv^2\,,$$

kde zrychlení míří směrem dolů. Dostáváme rychlost ve tvaru

$$v = \sqrt{\frac{gm}{k}}\,\mathrm{tgh}\sqrt{\frac{gk}{m}}t\,,$$

kde v čase $t = 0$ je rychlost nulová. Integrací dostáváme

$$h = H - \frac{m}{k}\log\cosh\sqrt{\frac{gk}{m}}t\,,$$

kde jsme integrační konstantu určili z počáteční podmínky. Najdeme čas T_2, za který míček spadne dolů, jako

$$\sqrt{\frac{m}{gk}}\,\mathrm{argcosh}\, e^{\frac{kH}{m}} = T_2\,.$$

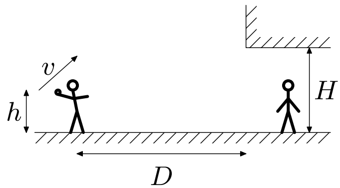
Řešením úlohy tak je

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\arccos e^{\frac{-kH}{m}}}{\mathrm{argcosh}\, e^{\frac{kH}{m}}} = 0{,}68\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 49 ... pomsta za stroje 7 bodů

Jarda se už vážně naštval na Viktora za jeho hlučné vysavače a začal ho honit okolo kolejí. Viktor se schovává v průjezdu pod kolejemi. Ten je uvnitř vysoký $H = 5{,}00\,\mathrm{m}$. Jarda stojí ve vzdálenosti $D = 12{,}0\,\mathrm{m}$ venku před začátkem průjezdu a háže na Viktora předmět rychlostí $v = 13{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ z výšky $h = 2{,}10\,\mathrm{m}$. Jak daleko od začátku průjezdu musí Viktor stát, aby ho Jarda netrefil?



Viktor vytvořil na pokoji inspirující prostředí...

Řešení se nám rozpadne na několik případů. V případě, že je rychlost malá, není možné zasáhnout strop průjezdu pod žádným počátečním úhlem a s průjezdem tak nemusíme počítat. Najdeme tedy maximální vzdálenost, do které je možné předmět danou rychlostí z výšky h dohodit.

Pro velké rychlosti se vyplatí házet pod malým úhlem, aby předmět nevystoupal moc do výšky a mohl se do průjezdu vůbec dostat. Pro tento případ je důležité, jestli se vrchol paraboly, po níž se předmět pohybuje, může nacházet ve větší vzdálenosti od Jardy, než je D. Prozkoumejme tuto možnost. Rovnice paraboly, po které se předmět pohybuje, je

$$y = h + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v^2\cos^2\alpha}\,, \tag{5}$$

kde g je tíhové zrychlení, α je počáteční úhel trajektorie vůči zemi, y je svislá souřadnice směrem vzhůru a x vodorovná směrem k průjezdu. Ve vrcholu paraboly se y nemění, derivace předchozí funkce je tedy rovna nule, díky čemuž najdeme polohu vrcholu jako

$$x_\mathrm{v} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{2g}\,,$$

kde jsme použili goniometrickou identitu $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. Maximální hodnota funkce sinus je 1, nejvyšší možná hodnota pro x_v je tedy v našem případě rovna $9{,}3\,\mathrm{m}$, což je méně než D. Při vstupu do průjezdu už tím pádem bude předmět klesat.

Z rovnice 5 najdeme vzdálenost bodu dopadu od Jardy tak, že položíme $y = 0$ a řešíme kvadratickou rovnici. Dostáváme

$$x_\mathrm{d} = \frac{v\cos\alpha}{g}\left(v\sin\alpha \pm \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh}\right)\,. \tag{6}$$

Zároveň ale musí být splněna podmínka $y(D) \leq H$, jinak Jardův předmět skončí na střeše průjezdu. Najdeme krajní úhly, pod kterými nastává rovnost; tedy že předmět při své trajektorii tečuje spodní roh průjezdu. Do rovnice 5 dosadíme $x = D$, $y = H$ a použijeme identitu $1/\cos^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha$. Dostáváme tak

$$0 = \frac{g}{2}\frac{D^2}{v^2}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha_\mathrm{m} - D\,\mathrm{tg}\,\alpha_\mathrm{m} + \frac{g}{2}\frac{D^2}{v^2} + H - h$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha_\mathrm{m} = \frac{v}{gD}\left(v \pm \sqrt{v^2 - 2g\left(\frac{gD^2}{2v^2} - h + H\right)}\right) .$$

Mezní úhly jsou tedy $67{,}0\,^\circ$ a $36{,}6\,^\circ$. V rozmezí mezi těmito úhly se předmět do průjezdu nedostane.

Je možné, že maximum funkce 6 neleží v tomto intervalu úhlů, takže by předmět vůbec nemusel tečovat zmiňovaný roh průjezdu. Úhel, pro který předmět doletí nejdál, nalezneme jako

$$\alpha_\mathrm{max} = \mathrm{arctg}\,\frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}} \doteq 42{,}1\,^\circ .$$

Tento úhel tedy leží v zakázaném intervalu, takto bychom trefili průjezd. Protože funkce 6 je pro $\alpha > 0$ napřed rostoucí a následně klesající, nastává nejdelší možný dostřel buď pro $67{,}0\,^\circ$, nebo $36{,}6\,^\circ$. Dosazením do 6 zjistíme, že maximální vzdálenost máme pro $36{,}6\,^\circ$, a sice $20{,}3\,\mathrm{m}$. Od této vzdálenosti pak ještě zbývá odečíst vzdálenost D, díky čemuž dostáváme hodnotu $8{,}3\,\mathrm{m}$. Pokud by se Viktor v průjezdu neschoval, Jarda by stejně dohodil pouze $20{,}6\,\mathrm{m}$, což je pouze o $30\,\mathrm{cm}$ dál.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 50 ... voda v míse 7 bodů

Do mísy tvaru dokonalé homogenní polosféry o poloměru $12\,\mathrm{cm}$ *a hmotnosti* $610\,\mathrm{g}$ *nalijeme* $650\,\mathrm{ml}$ *vody. Poté mísu začneme naklánět. Jakou práci musíme vykonat, aby se voda začala vylévat? Vodu považujte za ideální kapalinu a tloušťku stěn zanedbejte.*

Jarda vyplachoval misku, ve které byl okurkový salát.

Prvně si uvědomíme několik důležitých poznatků. Při naklápění mísy zůstává voda na místě, neměníme tak její potenciální energii. Jestliže navíc neuvažujeme žádné třecí síly mezi vodou a stěnou, nevykonáváme kvůli vodě vůbec žádnou práci. Jediné, co děláme z hlediska práce, je zvyšování těžiště samotné nádoby.

Další zajímavostí je tvar mísy. Jelikož je tloušťka stěn malá, považujme mísu jako polosféru. Mísa má zřejmě nějakou plošnou hustotu, která je konstantní. Hmotnost je tak všude úměrná ploše. Pro kulovou sféru navíc platí, že plocha kulové úseče je přímo úměrná její výšce. Odsud jednoduše plyne, že těžiště polosféry se nachází v polovině její výšky na ose souměrnosti, tedy v $h_1 = R/2$, kde jsme $R = 12\,\mathrm{cm}$ označili poloměr mísy.

Známe tedy polohu těžiště a vykonaná práce je tak úměrná změně jeho polohy. Nyní musíme vypočítat, jak moc musíme mísu naklonit, aby se z ní začala vylévat voda. To nastane, když vodní hladina bude ve stejné výšce, jako spodní okraj mísy. Označme α úhel, který svírá normála k hladině (a zemi) k rovině okraje mísy.

Výška těžiště nad podložkou je v tento moment

$$h_2 = R - \frac{R}{2}\sin\alpha\,.$$

Zbývá nám tedy z údaje o objemu získat hodnotu úhlu α. Tyto dvě veličiny svazuje rovnice[5]

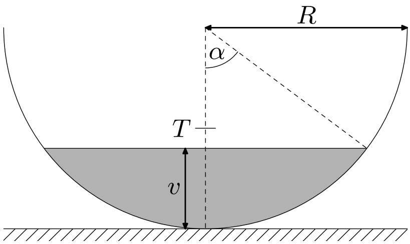
$$V = \frac{\pi R^3}{3}\left(2+\cos\alpha\right)\left(1-\cos\alpha\right)^2\,.$$

To je kubická rovnice pro $\cos\alpha$. Jejím číselným řešením je

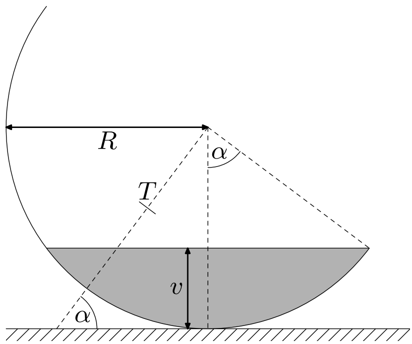
$$\cos\alpha = 0{,}630\,47 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 0{,}887\,28 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = 0{,}776\,27\,.$$

Rozdíl potenciální energie mísy tak je

$$E_{\mathrm{p2}} - E_{\mathrm{p1}} = mg\left(h_2 - h_1\right) = mgR\frac{(1-\sin\alpha)}{2} = 80\,\mathrm{mJ}\,.$$



Obr. 3: Situace před naklápěním.



Obr. 4: Situace při vylévání vody.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 51 ... kam se schovat? 9 bodů

Píše se rok 2311 a mimozemšťané se chystají zaútočit na Zemi. Přiletěli ve své vesmírné lodi a zastavili se ve výšce $h = 12\,200\,\mathrm{km}$ nad jižním pólem. Pozemšťané naštěstí už vyvinuli obranný raketový systém a loď útočníků zničili. Ta se rozpadla na tisíce malých kousků, které se rozletěly do všech směrů maximální rychlostí $v = 300\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Na kolik procent povrchu Země kousky dopadnou? Loď byla vyrobena z žáruvzdorného materiálu, takže trosky v atmosféře neshoří.

Jarda v Hvězdné bráně viděl, jak byla zničena Anubisova flotila.

Protože loď byla rozstřelena nad pólem, nemusíme se zabývat rotací Země. Také vidíme, že úloha je rotačně symetrická právě kolem osy zemské rotace, takže pro vyřešení úlohy nám

[5] Viz wikipedie `https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_cap`.

stačí rozebrat situaci v jednom řezu. Nejprve zjistíme, jestli mají úlomky dostatečnou rychlost, aby opustily gravitační pole Země. V tomto případě by jejich mechanická energie na jednotku hmotnosti (značme ji E) musela být kladná. Jednoduše ale zjistíme, že hodnota

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} \doteq -21{,}4\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$$

je záporná, proto se úlomky pohybují po elipsách kolem Země. V rovnici je $\mu = GM_{\oplus} \doteq \doteq 3{,}99 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}}$ gravitační parametr Země, neboli součin její hmotnosti a gravitační konstanty, a $r_0 = R_{\oplus} + h$ je vzdálenost místa výbuchu od středu Země.

Nyní se pokusíme nalézt část prostoru, kterou mohou úlomky zasáhnout. Pak najdeme průnik této množiny bodů s povrchem Země. Protože všechny úlomky mají na počátku stejnou rychlost i vzdálenost od zemského středu, mají i stejnou energii. Součet mechanické a potenciální energie je po celou dobu pohybu úlomků konstantní a souvisí s délkou hlavní poloosy elipsy a podle „rovnice živé síly“ jako

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}\,.$$

Protože všechny úlomky mají stejnou energii, jejich dráhy mají i stejně dlouhou hlavní poloosu

$$a = \frac{\mu r_0}{2\mu - r_0 v^2}\,.$$

Hranici prostoru, kde se úlomky mohou vyskytnout, najdeme následující úvahou. Vyberme si polopřímku p jdoucí libovolným směrem ze středu Země (tedy z ohniska F_1) a hledejme její nejvzdálenější bod, který ještě protíná dráha k nějakého úlomku. Označme tento bod jako B a jeho vzdálenost od středu Země (prvního ohniska) jako ρ. Nyní označme s úsečku spojující tento bod s druhým ohniskem F_2 dané dráhy k, jehož polohu zatím neznáme. Musí platit $\rho + + s = 2a$, protože bod B leží na elipse k.

Druhé ohnisko F_2 můžeme spojit s místem výbuchu úsečkou o délce t, potom bude platit $r_0 + + t = 2a$. Protože z energie známe délku a, známe i délku úsečky t. Ohnisko F_2 musí ležet někde na kružnici k_1 o poloměru $2a - r_0$ se středem v bodě výbuchu.

Bod B tedy leží na polopřímce p vzdálen ρ od ohniska F_1. Ohnisko F_2 se musí nacházet na kružnici k_2 o poloměru $2a - \rho$ se středem v bodě B. Protože ρ by mělo být co největší, je poloměr k_2 co nejmenší. Zároveň však toto ohnisko leží i na kružnici k_1. Obě tyto podmínky jsou splněny právě tehdy, když kružnice k_1 a k_2 mají společný právě jeden bod. Tímto bodem je právě ohnisko F_2 ležící na spojnici středů obou kružnic.

Vzdálenost bodu B od místa výbuchu je pak součtem poloměrů obou kružnic $2a - r_0 + 2a - \rho$. Opravdu důležité je ale to, že součet vzdálenosti bodu B od středu Země (tedy ρ) a bodu B od místa výbuchu (tedy $4a - r_0 - \rho$) je konstantní a roven $4a - r_0 - \rho + \rho = 4a - r_0$ pro každou polopřímku, na které bod B může ležet. Proto je množina všech takových bodů elipsa s ohnisky ve středu Země a v místě výbuchu, jejíž hlavní poloosa je

$$a_\mathrm{o} = \frac{4a - r_0}{2} = \frac{r_0}{2}\,\frac{2\mu + r_0 v^2}{2\mu - r_0 v^2} \doteq 9\,328\,\mathrm{km}\,.$$

Nyní už jen stačí najít průsečík této elipsy se Zemí. Zavedeme kartézský souřadnicový systém s počátkem ve středu spojnice bodu výbuchu a středu Země, neboli ve středu ochranné elipsy, za kterou se žádný úlomek nemůže dostat. Známe její hlavní poloosu a dokážeme vypočítat vedlejší jako

$$b_\mathrm{o} = \sqrt{a_\mathrm{o}^2 - e^2} = \sqrt{a_\mathrm{o}^2 - \frac{r_0^2}{4}} = \frac{r_0\sqrt{2\mu r_0 v^2}}{(2\mu - r_0 v^2)}\,.$$

Rovnice ochranné elipsy pak má tvar

$$\frac{x^2}{a_\mathrm{o}^2} + \frac{y^2}{b_\mathrm{o}^2} = 1\,,$$

zatímco rovnice kružnice (Země) je

$$\left(x + \frac{r_0}{2}\right)^2 + y^2 = R_\oplus^2\,.$$

Ze druhé rovnice dosadíme do první za y^2 a řešíme kvadratickou rovnici pro x. Po řadě úprav dojdeme k výsledku

$$x_{1,2} = \frac{2a_\mathrm{o}}{r_0}\left(-a_\mathrm{o} \pm R_\oplus\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2a_\mathrm{o}}{r_0}\left(-a_\mathrm{o} + R_\oplus\right) \doteq -2\,962\,\mathrm{km}\,,$$

odkud vybereme kladné znaménko (záporné nedává smysl).

Spočítáme, jak daleko jsou body protnutí ochranného elipsoidu od pólu Země

$$l = \left|\frac{r_0}{2} + x - R_\oplus\right| \doteq 51{,}4\,\mathrm{km}\,.$$

Plocha, kam dopadnou trosky lodi, je tak kulový vrchlík o výšce l. Úlomky tak bude zasaženo

$$\frac{2\pi R_\oplus l}{4\pi R_\oplus^2} \doteq 0{,}004\,0 = 0{,}40\,\%$$

planety.

Správně bychom měli počítat s tím, že Země je elipsoid, což by úlohu částečně zkomplikovalo. Polární poloměr je $R_\mathrm{p} = 6\,357\,\mathrm{km}$, rovníkový poloměr $R_\oplus = 6\,378\,\mathrm{km}$. Vzhledem k malé hodnotě l však není třeba počítat s elipsoidem, ale stačí nám uvažovat kouli se stejnou křivostí $R = R_\oplus^2/R_\mathrm{p} \doteq 6\,399\,\mathrm{km}$ na jižním pólu. Tuto hodnotu však nestačí pouze dosadit do všech předchozích vztahů, protože její střed se nenachází ve středu skutečné Země. Při tomto zpřesnění dostáváme hodnotu 0,398 %.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

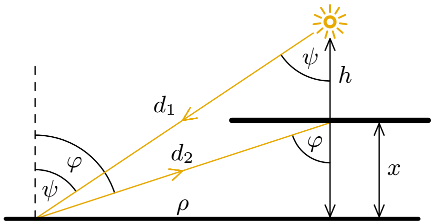
Úloha 52 ... čtení proti světlu — 9 bodů

Představte si rozsáhlou rovinu, jejíž albedo (míra odrazivosti) je 0,69. Ve výšce $h = 1{,}0\,\mathrm{m}$ nad rovinou je bodový zdroj světla, který ji osvětluje. Přesně pod zdroj umístíme černý kruh o poloměru h rovnoběžně s rovinou do výšky x. Určete x tak, aby do středu spodní strany kruhu dopadal největší světelný výkon. Předpokládejte, že se odražené světlo rozptyluje do všech směrů rovnoměrně a rovina je lambertovská.

Matěj si chtěl v leže číst, ale jediným světelným zdrojem byl lustr.

Nejprve si uvědomme, že albedo je redundantní údaj. Protože nás zajímá jenom maximum, nemusíme řešit, „kolik světla“ do středu disku absolutně dopadne.

Ještě než se dáme do samotného řešení úlohy, potřebujeme si uvědomit, jaké vlastnosti má bodový zdroj záření. Základní charakteristikou zdroje je, že vyzařuje výkon do všech stran rovnoměrně. To můžeme interpretovat tak, že je-li celkový zářivý výkon roven P, ve vzdálenosti r bude naměřená intenzita I úměrná P/r^2, neboť se veškerý výkon rovnoměrně rozprostře do kulové plochy o ploše $4\pi r^2$.



Obr. 5: Jednoduchá geometrie.

Také budeme potřebovat Lambertův zákon kosinů, který říká, že světelný výkon rozptýlený dokonale matnou plochou je přímo úměrný kosinu úhlu rozptylu (měříme od kolmice). Musíme si rovněž uvědomit, že dopadající světelný tok (ať už v případě roviny, nebo černého disku) je úměrný kosinu úhlu dopadu. Konečně, jelikož úloha je osově symetrická vzhledem k přímce procházející zdrojem a středem disku, bude výhodné si rovinu, na které se světlo rozptyluje, rozparcelovat do koncentrických, infinitesimálně tenkých prstýnků se středem v místě, kde osa symetrie protíná rovinu. Označíme-li ρ poloměr jednoho takového prstýnku o tloušťce $\mathrm{d}\rho$, bude jeho plocha rovna $2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho$.

Vybaveni těmito znalostmi pak můžeme tvrdit, že světelný výkon „nesený“ do středu spodní strany disku paprsky, které byly rozptýleny jedním nekonečně tenkým prstýnkem o poloměru ρ, bude

- nepřímo úměrný čtverci vzdálenosti zdroje od místa dopadu na rovinu (označme d_1),
- přímo úměrný kosinu úhlu dopadu na tuto rovinu (označme ψ),
- přímo úměrný ploše prstýnku $2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho$,
- přímo úměrný (dle Lambertova zákona) kosinu úhlu rozptylu směrem do středu disku (označme φ),
- nepřímo úměrný čtverci vzdálenosti místa rozptylu od středu černého disku (označme d_2) a nakonec
- přímo úměrný kosinu úhlu dopadu do cílové destinace (roven také φ, ze střídavosti úhlů).

Z jednoduché geometrie pak můžeme vyjádřit zmíněné veličiny jako

$$d_1 = \sqrt{h^2+\rho^2}\,, \quad \cos(\psi) = \frac{h}{d_1} = \frac{h}{\sqrt{h^2+\rho^2}}\,,$$
$$d_2 = \sqrt{x^2+\rho^2}\,, \quad \cos(\varphi) = \frac{x}{d_2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\,.$$

Nyní ještě určíme minimální hodnotu $\rho = \rho_0$ a vše přeintegrujeme od ρ_0 do ∞. Hodnota ρ_0 odpovídá poloměru stínu vrženého diskem, který určíme z podobnosti trojúhelníků jako

$$\frac{\rho_0}{h} = \frac{h}{h-x} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{h^2}{h-x}\,.$$

Světelný výkon ve středu disku tedy bude úměrný hodnotě

$$hx^2 \int_{\frac{h^2}{h-x}}^{\infty} \frac{\rho}{(h^2+\rho^2)^{3/2}(x^2+\rho^2)^2}\,\mathrm{d}\rho\,.$$

Tento integrál můžeme řešit numericky. Dosazením do programu Desmos si můžeme dokonce vykreslit graf této funkce, ze kterého vidíme, že maximum je $x \doteq 0{,}311\,\mathrm{m}$.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Radka Křížová
radka.krizova@fykos.cz

Úloha 53 ... chřestýš 11 8 bodů

Semir s parťákem pronásledují v policejním autě zločince. Delikvent sjel ze silnice na vodorovnou lesní cestu ve víře, že dálničním policistům ujede. Nevšiml si však, že cesta končí $H = 20\,\mathrm{m}$ hlubokým srázem. Zlosyn se ke srázu blíží rychlostí $v = 144\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Pod jakým úhlem dopadne přední nárazník na zem? Parametry pachatelova auta jsou: hmotnost auta $m = 1{,}32\,\mathrm{t}$, rozvor náprav $D = 2{,}46\,\mathrm{m}$, vzdálenost od přední nápravy k nárazníku $d_\mathrm{n} = 0{,}71\,\mathrm{m}$, výška těžiště auta nad zemí $h_\mathrm{t} = 42\,\mathrm{cm}$, vodorovná vzdálenost těžiště od přední nápravy $d_\mathrm{t} = 80\,\mathrm{cm}$, výška nárazníku nad zemí $h_\mathrm{n} = 15\,\mathrm{cm}$, moment setrvačnosti auta vzhledem k těžišti $I = 1{,}67 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Auto má poháněnou pouze přední nápravu. Předpokládejte, že zadní kola se valí bez odporu.

Jindra sleduje německé krimiseriály.

V momentě, kdy přední náprava přejede přes okraj srázu, auto ztratí oporu vepředu a tíhová síla způsobí rotaci okolo osy, která se nachází v místě, kde se zadní kola dotýkají země.

Normálová síla F, kterou působí země na zadní nápravu, se může měnit v závislosti na úhlu rotace auta. Proto učiníme předpoklad, že samotný přejezd okraje srázu trvá tak krátkou dobu ($t_1 = D/v \doteq 6{,}15 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}$), že se úhel auta vůči horizontální rovině příliš nezmění. Tím pádem můžeme sílu F považovat za konstantní. Síla F, která uděluje autu rotaci, působí v místě zadní nápravy, a její rameno je tak $x_\mathrm{t} = D - d_\mathrm{t} \doteq 1{,}64\,\mathrm{m}$.

Pohyb auta je popsán dvěmi rovnicemi, první je pro zrychlení ve svislém směru (osa y míří nahoru), druhá je pro rotační pohyb (úhlové zrychlení definujeme jako kladné)

$$m\ddot{y} = -mg + F,$$
$$I\dot{\omega} = Fx_\mathrm{t}.$$

Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Ze druhé rovnice můžeme za F dosadit do první rovnice

$$\ddot{y} = -g + \frac{I}{mx_\mathrm{t}}\dot{\omega}.$$

Víme, že pokles těžiště auta v důsledku účinku vertikálních sil musí korespondovat s poklesem těžiště v důsledku rotace auta okolo zadní nápravy

$$\dot{\omega} = -\frac{\ddot{y}}{x_\mathrm{t}}.$$

Obě výše odvozené rovnice můžeme spojit do jedné a vyjádřit úhlové zrychlení $\dot{\omega}$ pomocí známých veličin

$$\dot{\omega} = \frac{g}{x_\mathrm{t}\left(1 + \frac{I}{mx_\mathrm{t}^2}\right)}.$$

Alternativní přístup: Stejné úhlové zrychlení bychom získali v soustavě spojené se zadní nápravou, kde autu uděluje rotaci tíhová síla a moment setrvačnosti zjistíme ze Steinerovy věty.

Toto úhlové zrychlení působí jen po dobu $t_1 = D/v$, dokud zadní kola zůstávají v kontaktu se zemí. Za tu dobu auto získá úhlovou rychlost

$$\omega = \dot{\omega} t_1 = \frac{gD}{x_\mathrm{t} v\left(1 + \frac{I}{mx_\mathrm{t}^2}\right)} \doteq 0{,}25\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$$

a jelikož jeho počáteční úhlová rychlost byla nulová, pootočí se o úhel

$$\theta = \frac{1}{2}\dot{\omega} t_1^2 = \frac{gD^2}{2x_\mathrm{t} v^2\left(1 + \frac{I}{mx_\mathrm{t}^2}\right)} \doteq 7{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad} \doteq 0{,}44\,^\circ .$$

Náš předpoklad, že úhel pootočení bude malý se tak potvrdil jako oprávněný.

Od okamžiku, kdy i zadní kola přejedou okraj srázu, bude auto klesat k zemi po parabole a otáčet se konstantní úhlovou rychlostí $\omega \doteq 0{,}25\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ okolo zadní nápravy. Těžiště by dopadlo na zem za čas

$$t_\mathrm{t} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \doteq 2{,}0\,\mathrm{s}\,,$$

kde jsme zanedbali hloubku nárazníku pod zadní nápravou v bodě dopadu, protože $D + d_\mathrm{n}$ je mnohem menší než H. V ten okamžik bude úhel auta přibližně

$$\theta_\mathrm{n} \approx \omega t_\mathrm{t} \doteq 29\,^\circ\,,$$

kde vidíme, že úhel θ je možné taky zanedbat.

Je tento výsledek dostatečně přesný? Je pravda, že v reálném světě by pád auta i jeho rotaci ovlivnil odpor vzduchu, takže počítání čehokoliv složitějšího by taktéž neodpovídalo realitě. Pokud bychom ale nezanedbali nic kromě odporových sil, numericky by jsme mohli najít výsledek $28{,}2\,^\circ$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 54 ... pružina se třením 8 bodů

Mějme nehmotnou pružinu s tuhostí $k = 9{,}0\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, na jejímž volném konci je připevněno závaží o hmotnosti $m = 110\,\mathrm{g}$. Druhý konec pružiny je ukotven ve zdi. Pružina je orientována vodorovně, závaží klouže po podlaze se třením. Třecí koeficient je $f = 0{,}35$, klidová délka pružiny je $l_0 = 30\,\mathrm{cm}$. Tahem za závaží pružinu natáhneme o $x_0 = 20\,\mathrm{cm}$ a poté vypustíme s nulovou počáteční rychlostí. Jaká bude délka pružiny, až se závaží úplně zastaví?

Jindra si hrál se slinky.

Pohyb závaží je popsán diferenciální rovnicí

$$m\ddot{x} = -kx - fmg\,\mathrm{sgn}(\dot{x})\,, \tag{7}$$

kde g je tíhové zrychlení a $\mathrm{sgn}(\dot{x})$ je znaménková funkce signum

$$\mathrm{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} +1 & \dot{x} > 0\,, \\ 0 & \dot{x} = 0\,, \\ -1 & \dot{x} < 0\,. \end{cases}$$

Funkce signum zajišťuje to, že třecí síla působí vždy proti směru rychlosti.

Připomeňme si základní vlastnost třecí síly, kdy při nenulové rychlosti má velikost fmg. Ve statickém případě má třecí síla velikost menší nebo rovnou fmg, vždy tak, aby výslednice sil působící na těleso byla nulová. Aby se závaží z klidu uvedlo do pohybu, musí být působící síla pružinky větší než fmg. Hraniční případ je

$$x_{\max} = \frac{fmg}{k} \doteq 4{,}2\,\mathrm{cm}\,.$$

Pokud závaží bude stát v klidu vzdáleno méně než 4,2 cm od rovnovážné polohy, zůstane stát na místě. Pružina nevyvíjí dostatečnou sílu k rozpohybování závaží. Pro každý kyv se změní směr působení třecí síly, proto budeme postupně muset najít řešení rovnice (7) s několika různými počátečními podmínkami.

Rovnice popisující pohyb závaží od vypuštění do dosažení krajní polohy má tvar

$$m\ddot{x} + kx = fmg$$

a počáteční podmínky jsou $x(0) = x_0 = 20\,\mathrm{cm}$ a $\dot{x}(0) = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Obecné řešení této rovnice má tvar

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{fmg}{k},$$

kde A a B jsou integrační konstanty a $\omega = \sqrt{k/m}$ jsme označili úhlovou frekvenci kmitů. Hodnoty konstant A a B zjistíme z počátečních podmínek $A = x_0 - fmg/k$ a $B = 0\,\mathrm{m}$. Těleso překmitne do krajní polohy $x_1 = -x_0 + 2fmg/k$ v čase $t_1 = \pi/\omega$. Číselně vyjádříme $x_1 \doteq -11{,}6\,\mathrm{cm}$ a vidíme $|x_1| > x_{\max}$, což znamená, že těleso se rozpohybuje opačným směrem.

V tu chvíli se změní směr rychlosti, takže pohyb je nyní popsán rovnicí

$$m\ddot{x} + kx = -fmg$$

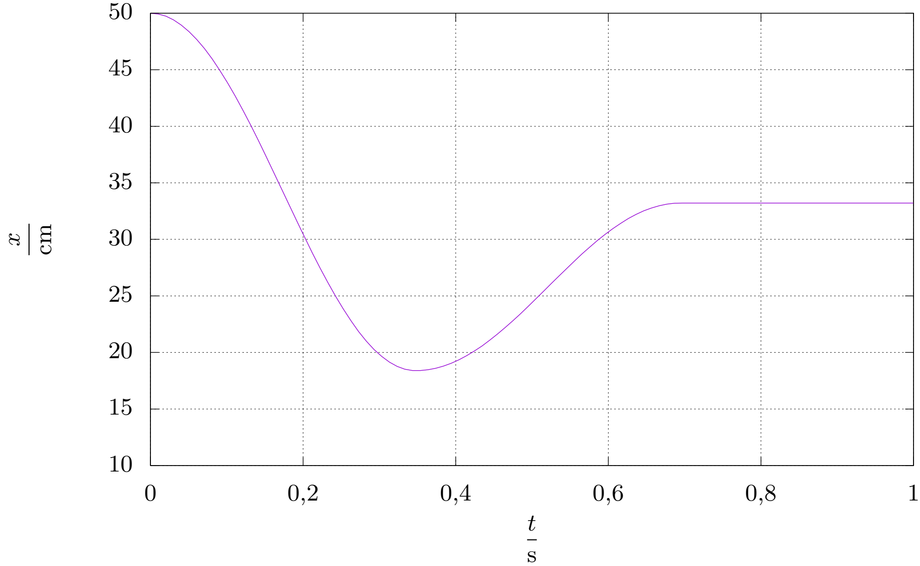
s počátečními podmínkami $x(t_1) = x_1$ a $\dot{x}(t_1) = 0$. Obecným řešením je

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - \frac{fmg}{k},$$

kde integrační konstanty určíme $A = -x_1 - fmg/k = -x_0 - 3fmg/k$ a $B = 0\,\mathrm{m}$. Těleso překmitne do krajní polohy $x_2 = x_0 - 4fmg/k$ v čase $t_2 = 2\pi/\omega$ a v ten moment bude jeho rychlost nulová. Číselně vyjádříme $x_2 \doteq 3{,}2\,\mathrm{cm}$ a vidíme $|x_2| < x_{\max}$, takže těleso zastaví v této poloze.

Délka pružinky po zastavení závaží bude $l = l_0 + x_2 \doteq 33{,}2\,\mathrm{cm}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz



Obr. 6: Délka pružiny v závislosti na čase.

Úloha 55 ... centrální pružina 9 bodů

Představme si pružinu, kterou zavěsíme ve vzdálenosti $r = 1\,321\,\mathrm{km}$ *od středu planety s hmotností* $M = 4{,}11 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ *a poloměrem* $R = 1\,220\,\mathrm{km}$. *Pružina má klidovou délku* $x_0 = 89\,\mathrm{km}$ *a homogenní délkovou hustotu* $\lambda = 8{,}7\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$. *Jakou musí mít tuhost, aby dosáhla právě na povrch planety? Rotaci soustavy neuvažujte.*

Jáchymovi bylo líto, že loni zapomněl na úlohu s hmotnou pružinkou, a rozhodl se to napravit.

Zavedeme obvyklé značení pro těžké pružiny. Veličina x bude označovat úsek délky $\mathrm{d}x$ na pružině v nenataženém stavu, zatímco $y(x)$ bude souřadnice daného úseku na natažené pružině. Vzdálenosti měřme od místa uchycení směrem do středu planety.

Na úsek $\mathrm{d}x$ působí gravitační síla

$$\mathrm{d}F_\mathrm{g} = \frac{GM}{(r-y)^2}\lambda\,\mathrm{d}x$$

a dále síla pružnosti od sousedních úseků. Tu označíme F. Můžeme jí spočítat tak, že si úsek představíme jako malou samostatnou pružinku s tuhostí $k_{\mathrm{d}x} = kx_0/\,\mathrm{d}x$, která se natáhne na délku $\mathrm{d}y$. Potom zřejmě

$$F = k_{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{d}y - \mathrm{d}x\right) = kx_0\frac{\mathrm{d}y - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = kx_0\left(y' - 1\right)\,,$$

kde k je hledaná tuhost původní pružiny.

Na začátku našeho úseku má tato síla velikost $F(x)$, na konci to bude $F(x + \mathrm{d}x)$. Rozdíl těchto sil je vyrovnán právě gravitační silou

$$F(x + \mathrm{d}x) - F(x) = -\,\mathrm{d}F_\mathrm{g}\,.$$

To se náhodou podobá definičnímu vztahu pro derivaci, takže můžeme psát

$$\frac{F(x+\mathrm{d}x)-F(x)}{\mathrm{d}x}=F'=-\frac{\mathrm{d}F_\mathrm{g}}{\mathrm{d}x}=-\frac{GM}{(r-y)^2}\lambda\,.$$

Sílu F už máme explicitně vyjádřenou, stačí jen spočítat derivaci a dostaneme

$$(r-y)^2\,y''=-\frac{GM\lambda}{kx_0}\quad\Rightarrow\quad z^2z''=-\frac{GM\lambda}{kx_0}=-K\,,\tag{8}$$

kde jsme pro zjednodušení zavedli souřadnici $z=y-r$ a konstantu K. Použijeme klasický trik

$$z''=z'\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}z}\quad\Rightarrow\quad z'\,\mathrm{d}z'=-Kz^{-2}\,\mathrm{d}z\quad\Rightarrow\quad\frac{z'^2}{2}=Kz^{-1}+C\,.$$

Tady je to správné místo na rozmyšlení si okrajových podmínek. Zřejmě $y(0)=0$ a $y_0=y(x_0)=$ $=r-R$. Definujeme-li $z_0=z(y_0)=y_0-r$, bude platit $z_0=-R$. Dále v bodě y_0 už pružina nebude téměř vůbec napnutá, proto bude platit $y'(x_0)=0$. Potom $z'=y'$ a $z'(y_0)=y'(x_0)=0$. Z toho spočítáme integrační konstantu

$$0=Kz_0^{-1}+C\quad\Rightarrow\quad C=-Kz_0^{-1}\quad\Rightarrow\quad z'=\sqrt{2K}\sqrt{z^{-1}-z_0^{-1}}\,.$$

Všimněme si, že z jde od $z(0)=y(0)-r=-r$ do $z_0=-R$. Z fyzikální úvahy vyplývá $y'>0$, takže i $z'>0$, čili z je stále rostoucí záporná funkce. Tím jsme ověřili, že odmocnina je dobře definovaná a můžeme pokračovat dál. Rovnici opět separujeme a přepíšeme na integrál

$$\sqrt{2K}\int\mathrm{d}x=\int\left(z^{-1}-z_0^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}z=\int\sqrt{\frac{z}{1-\frac{z}{z_0}}}\,\mathrm{d}z=z_0\sqrt{-z_0}\int\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-1}}\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

kde jsme zavedli substituci $\zeta=z/z_0$ a vytknuli jsme tak, aby v odmocnině $\sqrt{-z_0}$ bylo kladné číslo. Obecné řešení tohoto integrálu nevede na nic pěkného, naštěstí pro řešení úlohy není potřeba. Stačí si uvědomit, jaké budou integrační meze, integrujeme-li od začátku do konce pružiny, a zbytek můžeme spočítat numericky

$$I_0^{x_0}=\int_{\frac{r}{R}}^{1}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-1}}\,\mathrm{d}\zeta\doteq-0{,}583\,.$$

Abychom mohli vyjádřit K, potřebujeme ještě zintegrovat druhou stranu rovnice

$$z_0\sqrt{-z_0}I_0^{x_0}=\sqrt{2K}\int_0^{x_0}\mathrm{d}x=\sqrt{2K}x_0\,,$$

$$K=\frac{1}{2}\left(\frac{z_0\sqrt{-z_0}I_0^{x_0}}{x_0}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{-R^{\frac{3}{2}}I_0^{x_0}}{x_0}\right)^2=\frac{R^3}{2}\left(\frac{I_0^{x_0}}{x_0}\right)^2\,.$$

Nakonec už jen do definičního vztahu pro K (8) vyjádříme hledanou tuhost pružiny a máme výsledek úlohy

$$k=\frac{GM\lambda}{Kx_0}=\frac{2GM\lambda x_0}{\left(I_0^{x_0}\right)^2R^3}\doteq6{,}9\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha 56 ... zamlžené sklo 9 bodů

Mějme vodorovné sklo tloušťky $d_\mathrm{g} = 16{,}3\,\mathrm{\mu m}$ *a indexu lomu* $n_\mathrm{g} = 1{,}68$*, na kterém rozlijeme vodu o indexu lomu* $n_\mathrm{w} = 1{,}33$ *tak, že vytvoří rovnoměrnou vrstvu o tloušťce* $d_\mathrm{w} = 15{,}5\,\mathrm{\mu m}$*. Zespodu svítíme na sklo svisle světlem o vlnové délce* $\lambda = 0{,}590\,\mathrm{\mu m}$*. Jaký je poměr intenzity světla, která projde nyní, oproti případu, kdy na skle voda nebude? Uvažujte, že světlo se v materiálech pouze odráží, nebo jimi prochází, ale nepohlcuje se.* *Jarda má zamlženo.*

Při dopadu rovinné elektromagnetické vlny na rozhraní dochází k odrazů a průchodu vlnění. Protože zde máme rozhraní více, bude docházet k různým vnitřní odrazům a k interferenci. Koeficienty odrazu a průchodu závisí na úhlech směru šíření vlny vůči rozhraním, indexech lomu prostředí a také na polarizaci dopadajícího světla. V případě kolmého dopadu mají Fresnelovy rovnice pro koeficienty průchodu $t_\mathrm{s,p}$ pro obě polarizace stejný tvar. Pro koeficienty odrazu platí $r_\mathrm{s} = -r_\mathrm{p}$, liší se tedy pouze znaménkem. Právě tyto vztahy závisející na indexech lomu obou prostředí nám určují, jaká bude intenzita odraženého a prošlého záření.

Protože máme v úloze tři rozhraní, musíme pracovat s elektrickou intenzitou E, a ne přímo s I. Úlohu nejdřive vyřešíme pro jednu z polarizací, např. s, poté pouze přiřadíme ke všem r-koeficientům odrazu záporné znaménko a dostaneme výraz pro polarizaci typu p. Koeficient odrazu na rozhraní je tedy pro s-polarizaci pro kolmý dopad roven

$$r = \frac{E_r}{E_\mathrm{i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\,,$$

kde E_i je vektor elektrické intenzity dopadající vlny a E_r odražené vlny. Index lomu n_1 náleží prostředí, ve kterém se pohybuje dopadající vlna, n_2 je index lomu za rozhraním. V našem případě máme tři prostředí, index lomu vzduchu položíme roven $n = 1$, dále máme ještě n_g pro sklo a n_w pro vodu. Vidíme, že pokud se vlna odráží od prostředí s vyšším indexem lomu, dochází ke změně fáze, neboť koeficient je záporný.

Koeficient průchodu t je zaveden analogicky a má tvar

$$t = \frac{E_\mathrm{t}}{E_\mathrm{i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}\,,$$

kde E_t je prošlá elektrická intenzita.

Záření projde z jednoho prostředí do druhého, přičemž se část odrazí. Prošlá část pak dorazí ke druhému rozhraní, kde znovu něco projde a něco se odrazí. Tato odražená část se vrací k prvnímu rozhraní, kde ovšem též dochází k průchodu a odrazu. Vidíme tedy, že nedokážeme jednoduše odhadnout, kolik celkem záření projde. Iterováním těchto úvach bychom mohli dojít ke sčítání nekonečných řad. Tento způsob se dá použít u planparalelní desky (2 rozhraní), v tomto případě to už ale není moudré. Taky by jsme iterováním mohli úlohu řešit numericky, ale my chceme najít vzorec. Podívejme se na to tedy jinak.

V následujícím odstavci zavedeme značení pro jednotlivé hodnoty intenzity. Fáze těchto intenzit se ale v rámci jejich průchodu prostředím mění. K tomu budeme používat komplexní značení. Spodními indexy budeme značit intenzity v jednotlivých prostředích a v místě jejich vzniku položíme jejich fázi nulovou. Změna fáze závisí na tloušťce skla a vody a na jejich indexech lomu.

Označme tedy E_i dopadající vlnu, u které (na rozdíl od definic v předchozím odstavci) položíme fázi při dopadu jako nulovou. Vlna se směrem od prvního prostředí ke druhému je E_g1, vlna v opačném směru je E_g2. Vlna jdoucí od prvního rozhraní do prostoru je E_r. Je ovšem důležité si uvědomit, že v naší notaci se nebude jednat o vlnu odraženou, ale i o části vln, které se odrazily na dalších rozhraních.

Vlna jdoucí od druhého rozhraní ke třetímu je E_{w1}, v opačném směru E_{w2}. Vlna prošlá skrz celou dvojvrstvu je E_{t}. Znovu musíme mít na paměti, že tyto vlny jsou součtem všech dílčích vln, které jsou tvořeny nekonečnými odrazy na rozhraních.

Označme ještě koeficient průchodu ze vzduchu do skla t_{ag}, ze skla do vody t_{gw}, z vody do vzduchu t_{wa}, ze skla do vzduchu t_{ga} a z vody do skla t_{wg}. Pak platí

$$t_{\mathrm{ag}} = \frac{2}{1+n_{\mathrm{g}}}\,,\quad t_{\mathrm{gw}} = \frac{2n_{\mathrm{g}}}{n_{\mathrm{g}}+n_{\mathrm{w}}}\,,\quad t_{\mathrm{wa}} = \frac{2n_{\mathrm{w}}}{n_{\mathrm{w}}+1}\,,\quad t_{\mathrm{ga}} = \frac{2n_{\mathrm{g}}}{n_{\mathrm{g}}+1}\,,\quad t_{\mathrm{wg}} = \frac{2n_{\mathrm{w}}}{n_{\mathrm{g}}+n_{\mathrm{w}}}\,.$$

Obdobně pak označme koeficent odrazu mezi vzduchem a sklem r_{ag}, mezi sklem a vodou r_{gw}, mezi vodou a vzduchem r_{wa}, mezi sklem a vzduchem r_{ga} a mezi vodou a sklem r_{wg} (první prostředí je to, ve kterém je dopadající vlna na rozhraní). Pak platí

$$r_{\mathrm{ag}} = \frac{1-n_g}{1+n_g} = -r_{\mathrm{ga}}\,,\quad r_{\mathrm{gw}} = \frac{n_g-n_w}{n_g+n_w} = -r_{\mathrm{wg}}\,,\quad r_{\mathrm{wa}} = \frac{n_w-1}{n_w+1}\,.$$

Fázový posuv mezi rozhraním vzduch-sklo a sklo-voda označme δ_{g} a je rovný

$$\delta_{\mathrm{g}} = \frac{2\pi n_{\mathrm{g}} d_{\mathrm{g}}}{\lambda}\,,$$

kde d_{g} je tloušťka skla a λ vlnová délka světla. Analogicky zavedeme i fázový posuv δ_{w} ve vodě.

Vidíme, že musíme rozlišovat pořadí prostředí. Nyní už můžeme začít budovat vztahy mezi jednotlivými elektrickými intenzitami. Pro E_{g1} platí

$$E_{\mathrm{g1}} = t_{\mathrm{ag}}E_{\mathrm{i}} + r_{\mathrm{ga}}E_{\mathrm{g2}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{g}}}\,,$$

je totiž součtem prošlé a odražené vlny pronásobených příslušnými koeficienty. Odraženou vlnu E_{g2} musíme násobit změnou její fáze. Dále pak máme

$$E_{\mathrm{g2}} = r_{\mathrm{gw}}E_{\mathrm{g1}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{g}}} + t_{\mathrm{wg}}E_{\mathrm{w2}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{w}}}\,,\quad E_r = r_{\mathrm{ag}}E_{\mathrm{i}} + t_{\mathrm{ga}}E_{\mathrm{g2}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{g}}}\,.$$

Pro vlny ve vodě

$$E_{\mathrm{w1}} = t_{\mathrm{gw}}E_{\mathrm{g1}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{g}}} + r_{\mathrm{wg}}E_{\mathrm{w2}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{w}}}\,,\quad E_{\mathrm{w2}} = r_{\mathrm{wa}}E_{\mathrm{w1}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{w}}}, E_{\mathrm{t}} = t_{\mathrm{wa}}E_{\mathrm{w1}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{w}}}\,.$$

Uvažujme, že známe E_{i}, potom jsme právě dostali soustavu šesti rovnic o šesti neznámých. Naším úkolem je vyjádřit E_{t} v závislosti na E_{i}.

Máme

$$E_{\mathrm{t}} = t_{\mathrm{wa}}E_{\mathrm{w1}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{w}}} = t_{\mathrm{wa}}t_{\mathrm{gw}}\frac{E_{\mathrm{g1}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{w}}+i\delta_{\mathrm{g}}}}{1-r_{\mathrm{wg}}r_{\mathrm{wa}}\mathrm{e}^{i2\delta_{\mathrm{w}}}}$$

a

$$E_{\mathrm{g1}} - r_{\mathrm{ga}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{g}}}\left(r_{\mathrm{gw}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{g}}} + t_{\mathrm{wg}}r_{\mathrm{wa}}t_{\mathrm{gw}}\frac{\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{w}}+i\delta_{\mathrm{g}}}}{1-r_{\mathrm{wg}}r_{\mathrm{wa}}\mathrm{e}^{i2\delta_{\mathrm{w}}}}\right)E_{\mathrm{g1}} = t_{\mathrm{ag}}E_{\mathrm{i}}\,,$$

odkud

$$E_{\mathrm{t}} = \frac{t_{\mathrm{wa}}t_{\mathrm{gw}}t_{\mathrm{ag}}\mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{g}}+i\delta_{\mathrm{w}}}}{\left(1-r_{\mathrm{wg}}r_{\mathrm{wa}}\mathrm{e}^{i2\delta_{\mathrm{w}}}\right)\left(1-r_{\mathrm{ga}}r_{\mathrm{gw}}\mathrm{e}^{i2\delta_{\mathrm{g}}}\right) - r_{\mathrm{ga}}t_{\mathrm{wg}}r_{\mathrm{wa}}t_{\mathrm{gw}}\mathrm{e}^{i2\delta_{\mathrm{g}}+i2\delta_{\mathrm{w}}}}E_{\mathrm{i}}\,.$$

Dostali jsme docela symetrický výraz, což je dobrá zpráva. Navíc se koeficienty odrazu r vyskytují vždy po dvou v součinu. Při záměně všech těchto čísel za záporná (při změně polarizace z s na p) se tedy výsledek nezmění, protože se záporná znaménka vzájemně vynásobí na kladná. Od této chvíle již nemusíme rozlišovat mezi s a p polarizací. Nyní nám zbývá spočítat kvadrát absolutní hodnoty. Komplexní výraz v čitateli nebude hrát roli. Jmenovatel ovšem musíme vynásobit číslem k němu komplexně sdruženým.

Ve jmenovateli provedeme substituci $a = r_{\mathrm{wg}}r_{\mathrm{wa}}$, $b = r_{\mathrm{ga}}r_{\mathrm{gw}}$ a $c = r_{\mathrm{ga}}t_{\mathrm{wg}}r_{\mathrm{wa}}t_{\mathrm{gw}}$. Poté jej roznásobíme a celý jej vynásobíme jeho komplexně sdruženou hodnotou. Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}&1 + a^2 + b^2 + a^2b^2 + c^2\\ &-2\left(a\left(1 + b^2 - \frac{bc}{a}\right)\cos 2\delta_{\mathrm{w}} + b\left(1 + a^2 - \frac{ac}{b}\right)\cos 2\delta_{\mathrm{g}}\right)\\ &-2\left((c - ab)\cos(2\delta_{\mathrm{g}} + 2\delta_{\mathrm{w}}) - ab\cos(2\delta_{\mathrm{w}} - 2\delta_{\mathrm{g}}) + abc\right)\,.\end{aligned}$$

Uvažujme nyní, že $n_{\mathrm{w}} = n_{\mathrm{a}} = 1$, tedy že za sklem je už rovnou vzduch. Pak po dosazení za a, b a c máme $a = 0$, $b = r_{\mathrm{ga}}r_{\mathrm{ga}} = ((1 - n_{\mathrm{g}})(1 + n_{\mathrm{g}}))^2$ a $c = 0$. Kvadrát absolutní hodnoty elektrické intenzity pak je

$$I_{tg} = \frac{(t_{\mathrm{ga}}t_{\mathrm{ag}})^2}{1 + r_{\mathrm{ga}}^4 - 2r_{\mathrm{ga}}^2\cos 2\delta_{\mathrm{g}}}I_i\,,$$

kde v čitateli už nemáme (t_{wa}) ani (t_{gw}), neboť zde žádná voda není.

Porovnáním dostáváme výsledek (ve kterém jsme ve jmenovateli zanedbali některé malé členy)

$$\begin{aligned}\frac{I_{\mathrm{tgw}}}{I_{\mathrm{tg}}} &= \frac{t_{\mathrm{wa}}^2t_{\mathrm{gw}}^2t_{\mathrm{ga}}^{-2}\left(1 + (r_{\mathrm{ga}}r_{\mathrm{ga}})^2 - 2r_{\mathrm{ga}}r_{\mathrm{ga}}\cos 2\delta_{\mathrm{g}}\right)}{1 + a^2 + b^2 + c^2 - 2\left(a\left(1 - \frac{bc}{a}\right)\cos 2\delta_{\mathrm{w}} + b\left(1 - \frac{ac}{b}\right)\cos 2\delta_{\mathrm{g}} + (c - ab)\cos(2\delta_{\mathrm{g}} + 2\delta_{\mathrm{w}}) - ab\cos(2\delta_{\mathrm{w}} - 2\delta_{\mathrm{g}})\right)}\,,\\ \frac{I_{\mathrm{tgw}}}{I_{tg}} &= 0{,}96\,.\end{aligned}$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 57 ... Matějova černá teplá krabička 7 bodů

Určete počet fotonů v uzavřené krabičce o objemu přesně 1 litr, která je v místnosti o teplotě 25,0 K *v tepelné rovnováze.*

Karel přemýšlel, co asi dělá bývalý vedoucí Fyziklání online, když zrovna není vidět.

Na určenie počtu fotónov v našej krabičke musíme najprv určiť časticovú hustotu. Mohlo by sa zdať, že úloha je pomerne jednoduchý príklad na použitie Stefanovho-Boltzmannovho zákona na určenie hustoty energie elektromagnetického žiarenia, ale na prevedenie hustoty energie na počet fotónov by sme museli deliť akousi strednou energiou fotónu, ktorú nepoznáme. Musíme preto vyjsť z prvých princípov – z Planckovho zákona

$$B(T,\nu) = h\nu\frac{2\nu^2}{c^2}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{k_{\mathrm{B}}T}} - 1}\,,$$

kde ν je frekvencia žiarenia, T je termodynamická teplota čierneho telesa, h je Planckova konštanta, c je rýchlosť svetla a k_{B} je Boltzmannova konštanta. Veličina B udáva energiu $\mathrm{d}E$, ktorá je z plochy $\mathrm{d}S$ vyžiarená do priestorového uhla $\mathrm{d}\Omega$ za čas $\mathrm{d}t$, v intervale frekvencií $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$. Pre hustotu energie žiarenia by sme potom mali

$$u = \frac{4\pi}{c} L = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B(T,\nu)\,\mathrm{d}\nu\,.$$

Výsledkom integrácie by sme dostali Stefanov-Boltzmannov zákon. My však chceme určiť hustotu častíc, v integrande preto musíme deliť $B(T,\nu)$ energiou častice o danej frekvencii $h\nu$

$$n = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{B(T,\nu)}{h\nu}\,\mathrm{d}\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{2\nu^2}{c^2} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}} - 1}\,\mathrm{d}\nu\,.$$

Nasledujúcim krokom je previesť integrál obsahujúci fyzikálne veličiny na integrál matematický (prevedieme použitím substitúcie na bezrozmerný integrand – často používaná úprava, ktorá prevádza výpočetný fyzikálny problém na matematický.) Najdôležitejšie je mať peknú veličinu v argumente exponenciály, volíme preto

$$\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T} = x \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{x k_\mathrm{B} T}{h}\,.$$

Po substitúcii dostávame

$$n = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{2\left(\frac{x k_\mathrm{B} T}{h}\right)^2}{c^2} \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \frac{k_\mathrm{B}T}{h}\,\mathrm{d}x = 8\pi \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{ch}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x\,.$$

V prípade energií by sa v čitateli nachádzala tretia mocnina x. Integrál sa dá určiť numericky, alebo s využitím integrálnej definície Riemannovej zeta funkcie

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \zeta(3)\,\Gamma(3) = 2\zeta(3) \doteq 2{,}404\,.$$

Zhrnutím máme finálny vzťah do ktorého môžeme dosadiť

$$N = Vn \doteq 2{,}404 \cdot 8\pi \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{ch}\right)^3 \cdot V \doteq 3{,}17 \cdot 10^8\,.$$

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha M.1 ... rychle a ještě rychleji poprvé — 3 body

Dvě auta mají urazit stejnou vzdálenost s. Obě se budou pohybovat s konstantním zrychlením. První pojede se zrychlením a_1 a druhé se zrychlením $a_2 = 1{,}25\,a_1$. Počáteční rychlost obou aut je nulová. Jak rychle ujede požadovanou vzdálenost druhé auto? Výsledek zadejte do systému jako poměr času druhého auta k prvnímu. *Karel varioval úlohy.*

Vyjdeme ze známého vzorce pro zrychlený pohyb, který bude platit pro obě auta obdobně

$$s = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2\,,$$

kde t_1 a t_2 je doba, za kterou urazí dráhu s první, respektive druhé auto. Tím jsme ihned dostali rovnici, ze které vyjádříme t_2/t_1

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}25}} \doteq 0{,}894\,.$$

Odpovědí je, že druhé auto pojede 0,894-krát rychleji než první. Můžeme si také všimnout, že i když zvýšíme zrychlení o čtvrtinu, tak čas zkrátíme pouze o 0,106-násobek času prvního auta.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha M.2 ... rychle a ještě rychleji podruhé

3 body

Máme dvě auta a chceme, aby dráhu s projela za stejnou dobu t. V průběhu své cesty budou mít obě konstantní zrychlení ve směru jízdy. První auto pojede se zrychlením o velikosti a_1, kdežto druhé bude mít hodnotu $a_2 = 1{,}250\,a_1$. Druhé auto se začne pohybovat z klidu. S jakou počáteční rychlostí v_0 musí vyjet první auto? Výsledek udejte jako násobek $a_1 t$ (do systému zapište pouze číslo, kterým tyto veličiny násobíte). *Karel varioval úlohy podruhé.*

Obě dvě auta mají projet stejnou vzdálenost, takže platí

$$s = \frac{1}{2}a_1 t^2 + v_0 t = \frac{1}{2}a_2 t^2\,.$$

Z rovnice můžeme jednoduše vyjádřit rychlost

$$v_0 t = \frac{1}{2}a_2 t^2 - \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{1}{2}\left(a_2 - a_1\right) t^2\,,$$
$$v_0 = \frac{1}{2}\left(a_2 - a_1\right) t = \frac{1}{2}\cdot 0{,}250\,a_1 t = 0{,}125\,a_1 t\,.$$

Počáteční rychlost vyjádřená pomocí zrychlení prvního auta a celkového času je $v_0 = 0{,}125\,a_1 t$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha M.3 ... rychle a ještě rychleji potřetí

3 body

Dvě auta mají urazit stejnou vzdálenost s. Obě se budou pohybovat s konstantním ryvem, což je změna zrychlení v čase (analogicky jako je zrychlení změnou rychlosti). První auto pojede s ryvem g_1 a druhé s ryvem $g_2 = 1{,}25\,g_1$. Počáteční rychlost a zrychlení obou aut jsou nulové. Jak rychle ujede požadovanou vzdálenost druhé auto? Výsledek zadejte do systému jako poměr času druhého auta k prvnímu. *Karel varioval úlohy potřetí.*

Jde o jednoduchou aplikaci ryvu, pokud známe vzoreček pro polohu v závislosti na čase (který se dá najít na internetu, ale s trochou větší snahy) nebo si ho relativně jednoduše zintegrujeme. Vyjdeme z toho, že je ryv konstantní, pak pro zrychlení platí

$$a_i = \int_0^{t_i} g_i\,\mathrm{d}\tilde{t} = g_i t_i\,,$$

kde i může být 1 nebo 2 – podle toho, jestli chceme rovnici pro první či druhé auto, a a je zrychlení. Pokračujeme s integrací pro rychlost v a polohu s. Pamatujeme přitom na to, že máme zadané nulové počáteční podmínky.

$$v_i = \int_0^{t_i} a_i \,\mathrm{d}\tilde{t} = \int_0^{t_i} g_i \tilde{t} \,\mathrm{d}\tilde{t} = \frac{1}{2} g_i t_i^2 \,,$$
$$s = \int_0^{t_i} v_i \,\mathrm{d}\tilde{t} = \int_0^{t_i} \frac{1}{2} g_i \tilde{t}^2 \,\mathrm{d}\tilde{t} = \frac{1}{6} g_i t_i^3 \,.$$

Poslední vztah už můžeme přepsat jako rovnici pro obě auta s tím, že se velice rychle dostáváme k výsledku

$$\frac{1}{6} g_1 t_1^3 = \frac{1}{6} g_2 t_2^3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t_2}{t_1} = \sqrt[3]{\frac{g_1}{g_2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1{,}25}} \doteq 0{,}928 \,.$$

Druhé auto dojede za čas 0,928násobně kratší než první auto.

Ke stejnému výsledku bychom se mohli dobrat i logickou úvahou o analogii se zrychleným pohybem. U pohybu s konstantním zrychlením nezávisí zrychlení na čase, rychlost závisí na čase lineárně a poloha kvadraticky. Pokud si fixujeme konstantní ryv, pak nám opět budou přibývat postupně mocniny času. Zrychlení bude závislé na čase lineárně, u rychlosti půjde o závislost kvadratickou a u polohy kubickou. Touto zjednodušenou úvahou se nedostaneme k faktoru 1/6, nicméně tento faktor znát nemusíme, pokud chceme za výsledek pouze poměr časů dvou aut.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha M.4 ... rychle a ještě rychleji počtvrté — 3 body

Dvě auta mají urazit stejnou vzdálenost s. Obě dvě pojedou s konstantním výkonem. Výkon prvního bude P_1 a druhého $P_2 = 1{,}25\, P_1$. Počáteční rychlost obou aut je nulová a mají stejnou hmotnost i s nákladem. Jak rychle ujede požadovanou vzdálenost druhé auto? Výsledek zadejte do systému jako poměr času druhého auta k prvnímu. *Karel varioval úlohy počtvrté.*

Vyjdeme ze vztahu pro kinetickou energii $E_{\mathrm{k},i}$ pohybu i-tého auta

$$E_{\mathrm{k},i} = \frac{1}{2} m v_i^2 = P_i t_i \,,$$

kde m je hmotnost (bez indexu, protože je u obou aut stejná), v_i je rychlost auta a t_i je doba pohybu. Vyjádříme-li rychlost, dostáváme její závislost na čase a dalších parametrech, které považujeme v čase za konstantní

$$v_i = \sqrt{\frac{2P_i t_i}{m}} \,.$$

Potřebujeme však znát závislost uražené dráhy na čase. Proto vztah pro rychlost zintegrujeme

$$s = \int_0^{t_i} v_i \,\mathrm{d}\tilde{t} = \int_0^{t_i} \sqrt{\frac{2P_i \tilde{t}_i}{m}} \,\mathrm{d}\tilde{t} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2P_i t_i^3}{m}} \,.$$

Uražená dráha je pro obě auta stejná, dáme ji tedy do rovnosti

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P_1t_1^3}{m}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P_2t_2^3}{m}}\,,$$

$$P_1t_1^3 = P_2t_2^3\,,$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt[3]{\frac{P_1}{P_2}} \doteq 0{,}928\,.$$

Druhé auto dorazí za 0,928-násobek času prvního auta, když bude mít o 25 % vyšší výkon. Shodou okolností jde o stejný poměr časů jako u úlohy „rychle a ještě rychleji potřetí“, kde jste řešili srovnání dvou aut, které měly konstantní ryv. A to i když jde o různé závislosti na čase.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha E.1 ... světelný kruh 4 body

Tenkou spojnou čočku umístíme do vzdálenosti 7,0 cm *od stínítka. Poté zapneme vzdálený světelný zdroj, který leží na její optické ose. Na stínítku se za čočkou objevil osvětlený kruh. Čočku přesuneme do vzdálenosti* 9,0 cm *od stínítka a všimneme si, že kruh na stínítku má nyní stejný poloměr jako předtím. Jaká je ohnisková vzdálenost čočky?* *Jarda viděl opak zatmění.*

Protože je zdroj daleko od čočky, soustředí se všechny paprsky procházející čočkou do jejího ohniska. Po průchodu čočkou tvoří kužel. Pokud je stínítko mezi čočkou a jejím ohniskem, vytvoří průsečnice tohoto kužele a stínítka kruh. Nechť je v tomto případě vzdálenost mezi ohniskem a stínítkem x_1. Kruh o stejném poloměru se však zobrazí, když bude stínítko za ohniskem a paprsky prošlé skrz ohnisko se zase začnou rozbíhat. Nechť je nyní mezi stínítkem a ohniskem vzdálenost x_2. Protože poloměry jsou stejné, platí $x_1 = x_2$.

V prvním případě navíc platí $x_1 = f - d_1$, kde $d_1 = 7\,\mathrm{cm}$, ve druhém naopak $x_2 = d_2 - f$ (zde $d_2 = 9\,\mathrm{cm}$). Protože se tyto vzdálenosti rovnají, dostáváme

$$f = \frac{d_1 + d_2}{2} = 8\,\mathrm{cm}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha E.2 ... planparalelní čočka 3 body

Tenkou, z obou stran vypouklou čočku s poloměry křivosti $R_1 = 20\,\mathrm{cm}$ *a* $R_2 = 35\,\mathrm{cm}$ *rozřízneme kolmo k její optické ose. Obě půlky dáme vypouklými stranami těsně k sobě (rovné plochy jsou od sebe). Jaký je poměr mezi starou a novou ohniskovou vzdáleností takové soustavy skel? Index lomu skla je* $n = 1{,}5$. *Podle Jardy na tvaru nezáleží.*

Podívejme se na to, jak je to s průchodem paprsku dvěma čočkami, které jsou těsně vedle sebe. Nechť a je vzdálenost objektu před první čočkou s ohniskovou vzdáleností f_1. Těsně za ní je druhá čočka s ohniskovou vzdáleností f_2. Pomocí Gaussovy zobrazovací rovnice najdeme polohu obrazu a' objektu jako

$$a' = \frac{af_1}{a - f_1}\,.$$

Tato vzdálenost je kladná, pokud se objekt zobrazil za první čočku. Obraz zobrazíme druhou čočkou, přičemž nyní je vzdálenost vzoru rovna $-a'$. Druhá čočka zobrazí objekt na

$$a'' = \frac{-a' f_2}{-a' - f_2} = \frac{-\left(\frac{af_1}{a-f_1}\right) f_2}{-\frac{af_1}{a-f_1} - f_2} = \frac{af_1 f_2}{af_1 + af_2 - f_1 f_2} = \frac{aF}{a - F}\,,$$

kde $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$. Odvodili jsme tedy zajímavý vztah, že pro dvě čočky v těsné blízkosti za sebou je jejich celková optická mohutnost součtem optických mohutností obou čoček.

Nyní si uvědomme, že f_1 ani f_2 nezávisí na otočení čočky. Důležité pro tuto úlohu také je, že jsme odvodili, že F na pořadí čoček nezávisí. V obou případech ze zadání je tedy F stejné a rovné ohniskové vzdálenosti původní čočky. Hledaný poměr je tedy 1.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha E.3 ... dvě lupy 4 body

Jarda doma objevil dvě lupy a začal si s nimi hrát. Když je položil těsně na sebe, zjistil, že mají ohniskovou vzdálenost $F = 7\,\mathrm{cm}$. Pak čočky umístil do vhodné vzdálenosti od sebe, stoupl si daleko za ně a pohlédl na vzdálený strom. Uviděl ho ostře a jeho velikost byla 1,5-krát větší než bez čoček. Jaký je rozdíl ohniskových vzdáleností obou čoček? Odečítejte menší od větší. Lupy považujte za tenké čočky. *Jarda bydlí tak vysoko, že z okna pořádně nevidí až na zem.*

V předchozí úloze jsme odvodili, že pro 2 čočky, které jsou umístěné těsně za sebou, platí $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$, kde f_1 a f_2 jsou ohniskové vzdálenosti obou čoček a F je ohnisková vzdálenost soustavy, kterou známe ze zadání.

Naopak když se Jarda díval na vzdálený strom skrze dvě čočky a viděl jej ostře, znamená to, že si postavil Keplerův dalekohled. U něj platí, že ohniska obou čoček jsou ve stejném bodě, tedy že čočky jsou od sebe vzdáleny $f_1 + f_2$. Zvětšení takového dalekohledu je pak $Z = \frac{f_1}{f_2}$ pro $f_1 > f_2$.

Ze dvou rovnic o dvou neznámých pak vypočítáme f_1 a f_2 jako

$$f_1 = F\left(1 + Z\right)\,,$$
$$f_2 = F\left(1 + \frac{1}{Z}\right)\,.$$

Protože $Z > 1$, platí $f_1 > f_2$, takže nás zajímá výsledek $f_1 - f_2$, který je

$$f_1 - f_2 = F\left(Z - \frac{1}{Z}\right) = 5{,}8\,\mathrm{cm}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha E.4 ... točíme mravence 8 bodů

Mějme soustavu dvou čoček a stínítka. První čočka, s ohniskovou vzdáleností $f_1 = 3{,}6\,\mathrm{cm}$, je ukotvena ve vzdálenosti $d = 8{,}3\,\mathrm{cm}$ od stínítka. Druhá, s ohniskovou vzdáleností $f_2 = -1{,}6\,\mathrm{cm}$, se nachází mezi první čočkou a stínítkem. Mravenec, nacházející se na optické ose ve vzdálenosti $a_0 = 9{,}7\,\mathrm{cm}$ od první čočky směrem od stínítka, se přibližuje rychlostí $v = 0{,}6\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$ k čočce. Obraz mravence je zaostřený na stínítko. Jakou rychlostí se musí pohybovat druhá čočka, aby byl obraz mravence zaostřený na stínítko i v dalším okamžiku? Uveďte kladné znaménko, pokud se čočka pohybuje stejným směrem jako mravenec. *Jarda rád fotí hmyz.*

Nechť je poloha mravence dána vztahem $a = a_0 - vt$. Pak je poloha jeho obrazu po průchodu první čočkou rovna

$$a' = \frac{af_1}{a - f_1}\,.$$

Vzdálenost tohoto obrazu od druhé čočky je

$$a'' = d - x - a'\,,$$

kde $x = x_0 + ut$, přičemž x_0 je vzdálenost druhé čočky od stínítka v čase $t = 0\,\mathrm{s}$. Po průchodu druhou čočkou je vzdálenost obrazu mravence od čočky

$$a''' = \frac{a'' f_2}{a'' - f_2} = \frac{(d - x - a')\, f_2}{d - x - a' - f_2} = x\,,$$

kde poslední rovnost plyne z podmínky ostrého obrazu na stínítku. Tuto kvadratickou rovnici vyřešíme

$$x = \frac{-a' + d \pm \sqrt{a' - d}\sqrt{a' - d + 4f_2}}{2}\,.$$

Najdeme

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(-\frac{a_0 f_1}{a_0 - f_1} + d + \sqrt{\frac{a_0 f_1}{a_0 - f_1} - d}\sqrt{\frac{a_0 f_1}{a_0 - f_1} - d + 4f_2}\right) \doteq 3{,}69\,\mathrm{cm}\,,$$

kde jsme podle zadání úlohy vybrali kladný kořen. Výrazů pod odmocninami se nebojme. Oba jsou záporné, takže když se oba schovají pod jednu odmocninu, odmocňujeme kladné číslo.

Nyní do rovnice pro x dosadíme časovou závislost. Protože se ovšem bavíme o dalším okamžiku, budeme uvažovat t jako velmi malý – předpokládejme $a_0 \gg vt$. Pak

$$\begin{aligned} a' &= \frac{(a_0 - vt)\, f_1}{a_0 - vt - f_1} = \frac{(a_0 - vt)\, f_1}{\left(1 - \frac{vt}{a_0 - f_1}\right)(a_0 - f_1)} \\ &\approx \frac{(a_0 - vt)\, f_1}{(a_0 - f_1)}\left(1 + \frac{vt}{a_0 - f_1}\right) \approx \frac{a_0 f_1}{(a_0 - f_1)} + \frac{v f_1^2}{(a_0 - f_1)^2} t\,. \end{aligned}$$

Pro přehlednost si označme $b' = a'(t = 0\,\mathrm{s}) = \frac{a_0 f_1}{(a_0 - f_1)}$. Nyní vyřešíme

$$\sqrt{a' - d} = \sqrt{b' - d}\sqrt{1 + \frac{1}{b' - d}\frac{vb'^2}{a_0^2}t} \approx \sqrt{b' - d}\left(1 + \frac{1}{b' - d}\frac{vb'^2}{2a_0^2}t\right)\,.$$

Podobně upravíme i druhou odmocninu

$$\sqrt{a'-d+4f_2} = \sqrt{b'-d+4f_2}\sqrt{1+\frac{1}{b'-d+4f_2}\frac{vb'^2}{a_0^2}t}$$
$$\approx \sqrt{b'-d+4f_2}\left(1+\frac{1}{b'-d+4f_2}\frac{vb'^2}{2a_0^2}t\right) .$$

Pro přehlednost v dalších krocích označíme $s_1 = \sqrt{b'-d}$ a $s_2 = \sqrt{b'-d+4f_2}$. Dosadíme do výrazu pro x a máme

$$x = \frac{1}{2}\left[-b' - \frac{vb'^2}{a_0^2}t + d \pm s_1 s_2 \left(1+\frac{vb'^2}{2s_1^2 a_0^2}t\right)\left(1+\frac{vb'^2}{2s_2^2 a_0^2}t\right)\right]$$
$$\approx \frac{1}{2}\left\{-s_1^2 - \frac{vb'^2}{a_0^2}t \pm s_1 s_2\left[1+\frac{vb'^2}{2a_0^2}\left(\frac{1}{s_1^2}+\frac{1}{s_2^2}\right)t\right]\right\} .$$

Konečně můžeme odečíst $x - x_0$ a máme

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\frac{vb'^2}{a_0^2}\left(\frac{s_1^2+s_2^2}{2s_1 s_2} - 1\right)t\,.$$

Rychlost čočky pak je

$$u = \frac{x-x_0}{t} = \frac{1}{2}\frac{vf_1^2}{(a_0-f_1)^2}\left(\frac{\frac{a_0 f_1}{a_0-f_1} - d + 2f_2}{\sqrt{\frac{a_0 f_1}{a_0-f_1} - d}\sqrt{\frac{a_0 f_1}{a_0-f_1} - d + 4f_2}} - 1\right) \doteq -0{,}23\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Všimněte si, že ve zlomku v čitateli celého výrazu je v čitateli aritmetický průměr a ve jmenovateli geometrický průměr čísel $\frac{a_0 f_1}{a_0-f_1} - d$ a $\frac{a_0 f_1}{a_0-f_1} - d + 4f_2$.

Po této zajímavosti ovšem musíme správně určit, jakým směrem se pohybuje čočka. Souřadnici čočky x jsme definovali jako její vzdálenost od stínítka a její rychlost u je kladná ve směru od stínítka. Záporná rychlost čočky tedy znamená, že se přibližuje ke stínítku. Mravenec se taky přibližuje směrem ke stínítku. Čočka se tedy pohybuje stejným směrem jako mravenec, proto je náš výsledek $0{,}23\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha X.1 ... uklízíme zahrádku 4 body

Nastal podzim a na naší zahrádce začalo ve velkém padat listí. Po jeho shrabání ho potřebujeme odvézt na nedalekou hromadu, proto jej nabereme na zahradní kolečko. K hromadě jdeme stálou rychlostí $v = 1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a kolečko před sebou tlačíme po zámkové dlažbě, takže mezi dlaždicemi o rozměru $15\,\mathrm{cm}$ je vždy malá díra, kde se rychlost kolečka sníží o $10\,\%$. Určete konstantní vodorovnou složku síly, kterou musíme kolečko tlačit směrem dopředu, aby jeho průměrná rychlost byla též v. Kolečko i s listím má hmotnost $19\,\mathrm{kg}$.

Na Jardův skleník napadala hromada listí.

Průměrná rychlost kolečka je stejná jako naše rychlost chůze, tedy v. Tyto rychlosti jsou konstantní, kolečko ale periodicky snižuje svou hybnost. To musíme kompenzovat působením síly, protože ho máme udržet na průměrné rychlosti v.

Sílu F najdeme pomocí známého vztahu

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}\,,$$

kde Δp je změna hybnosti za čas Δt. Tento časový úsek zřejmě odpovídá $\Delta t = \frac{l}{v}$, kde l je rozměr jedné dlaždice.

Na každé dlaždici kolečko ztratí hybnost $\Delta p = m\Delta v$, kde m je jeho hmotnost a Δv změna rychlosti. Označme v_{max} maximální rychlost kolečka a v_{min} minimální. Pak platí $\Delta v = v_{\mathrm{max}} - v_{\mathrm{min}}$. Zároveň se rychlost kolečka mění lineárně v čase (když ji zrovna neztrácí na hranách dlaždic), tedy průměrná rychlost v se musí rovnat průměru

$$v = \frac{v_{\mathrm{max}} + v_{\mathrm{min}}}{2}\,.$$

Poslední důležitou informaci v zadání ještě přepíšeme do podoby $v_{\mathrm{min}} = (1-\eta)\,v_{\mathrm{max}} = 0{,}9\,v_{\mathrm{max}}$, kde $\eta = 0{,}1$ je desetiprocentní ztráta rychlosti.

Potom $v_{\mathrm{max}} = \frac{2v}{2-\eta}$ a $\Delta v = \eta v_{\mathrm{max}}$. Dosazením do původního vztahu pro sílu dostáváme

$$F = \frac{mv\Delta v}{l} = \frac{2mv^2\eta}{l\,(2-\eta)} = 19{,}2\,\mathrm{N}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha X.2 ... zalévání zahrádky 4 body

Jarda si vysadil šest ovocných keřů vedle zahradního jezírka o ploše hladiny $A = 8\,\mathrm{m}^2$. Ty stojí v řadě, první je $2{,}3\,\mathrm{m}$ od jezírka a každý další je o $1{,}0\,\mathrm{m}$ dál než předchozí. Jarda chodí keře zalévat tak, že vždy nabere plnou desetilitrovou konvici vody z jezírka a jde ji vylít k rostlině. Celkový čas nabírání a vylití jedné konvice je $45\,\mathrm{s}$, Jarda chodí rychlostí $v = 1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Ze zahradní hadice o objemovém průtoku $Q = 0{,}9\,\mathrm{l{\cdot}s^{-1}}$ mezitím dopouští do jezírka vodu. Po zalití poslední rostliny se šel podívat, o kolik stoupla hladina jezírka od chvíle, kdy začal nabírat první konvici. Spočítejte, kolik naměřil. Pokud hladina klesla, uveďte zápornou hodnotu.

Jarda našel rybízy ve slevě.

Určíme čas, který Jardovi zalévání zabere. Nechť $N = 6$ je počet keřů a $t_{\mathrm{m}} = 45\,\mathrm{s}$ je čas nabrání a vylití konve, pak celkový čas na manipulaci s konví odpovídá $t_{\mathrm{k}} = Nt_{\mathrm{m}}$.

Čas, který Jardovi zabere chůze tam i zpět, určíme jako

$$t_{\mathrm{ch}} = 2\frac{1}{v}\left(\sum_{n=0}^{N-1} d_0 + nd\right) = \frac{2}{v}\left(Nd_0 + \frac{N\,(N-1)}{2}d\right)\,,$$

kde $d_0 = 2{,}3\,\mathrm{m}$ je vzdálenost prvního keře od jezírka a $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$ je vzdálenost mezi keři.

Celkový čas zalévání činí

$$t = N\left(t_{\mathrm{m}} + 2\frac{d_0}{v} + d\frac{N-1}{v}\right)\,.$$

Za tuto dobu přitekl z hadice do jezírka objem vody Qt. Jarda však nabral N konvic o objemu $V_\mathrm{k} = 10\,\mathrm{l}$, přírůstek objemu vody v jezírku je tak $\Delta V = Qt - NV_\mathrm{k}$.

Hladina stoupla o

$$h = \frac{\Delta V}{A} = QN \frac{\left(t_\mathrm{m} + 2\frac{d_0}{v} + d\frac{N-1}{v} - \frac{V_\mathrm{k}}{Q}\right)}{A} = 2{,}83\,\mathrm{cm}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha X.3 ... namotáváme kabel 6 bodů

Jarda seká na své zahrádce elektrickou sekačkou. Jakmile má hotovo, musí na kabelový buben namotat celou šňůru o délce $L = 20\,\mathrm{m}$. Ta se navíjí na válec o průměru $D = 40\,\mathrm{cm}$, jehož osa symetrie leží vodorovně. Uchycení kabelu na bubnu se nachází těsně u země. Koeficient tření mezi zemí a šňůrou je $f = 0{,}7$, délková hustota kabelu $\lambda = 220\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$. Určete, jakou práci při smotání Jarda vykoná. *Jarda pokládal kabel.*

Třecí síla působící na šňůru je úměrná její délce x, která po celou dobu navíjení zůstává v kontaktu se zemí. Platí tak

$$F = fmg = fgx\lambda\,,$$

kde $m = \lambda x$ je hmotnost nenamotaného kabelu a g je tíhové zrychlení.

Práci na překonání třecí síly najdeme pomocí integrálu jako

$$W_\mathrm{F} = \int_0^L F\,\mathrm{d}x = fg\lambda \int_0^L x\,\mathrm{d}x = fg\lambda \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{fg\lambda L^2}{2}\,.$$

Dále jsme namotáním zvýšili těžiště celého kabelu. Ten navíjíme na buben o průměru D, takže počet otoček šňůry kolem něj je $\frac{L}{\pi D} \doteq 15{,}9$. Těžiště šňůry tak můžeme položit do středu válce, protože celých otoček namotáme hodně a posunutí těžiště vlivem nedokončení poslední otočky můžeme zanedbat. Vykonali jsme tak práci

$$W_\mathrm{g} = mgh = \lambda Lgh\,,$$

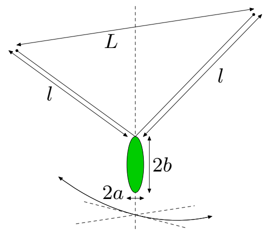
kde $h = \frac{D}{2}$ je právě výška středu bubnu (a tedy i těžiště kabelu) nad zemí.

Celková vykonaná práce odpovídá

$$W = W_\mathrm{F} + W_\mathrm{g} = \lambda gL\left(\frac{D}{2} + \frac{fL}{2}\right) = 310\,\mathrm{J}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha X.4 ... kmitající okurka 6 bodů



Okurka v Jardově skleníku má tvar protáhlého rotačního elipsoidu s poloosami $a = 3\,\mathrm{cm}$ a $b = 10\,\mathrm{cm}$ a visí uprostřed části stonku, která má délku $2l = 90\,\mathrm{cm}$. Konce této části stonku jsou upevněny ve stejné výšce ve vzdálenosti $L = 51\,\mathrm{cm}$ od sebe. Hmotnost okurky je $m = 450\,\mathrm{g}$. Určete periodu malých kmitů kolem rovnovážné polohy při vychýlení, které je kolmé na rovinu závěsu.

Jarda má rád okurky.

Pro nalezení periody malých kmitů použijeme známý vztah pro fyzické kyvadlo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\,,$$

kde J je moment setrvačnosti kmitajícího tělesa vůči ose otáčení, m je hmotnost tělesa, g tíhové zrychlení a d je vzdálenost těžiště od osy otáčení.

Osa otáčení prochází body upevnění stonků. Těžiště okurky se nachází v jejím středu, takže z geometrie úlohy dostáváme vzdálenost d jako

$$d = b + \sqrt{l^2 - \frac{L^2}{4}} = 47\,\mathrm{cm}\,,$$

kde $b = 10\,\mathrm{cm}$, $L = 51\,\mathrm{cm}$ a $l = 45\,\mathrm{cm}$ jsou vzdálenosti ze zadání.

Moment setrvačnosti okurky vůči této ose najdeme pomocí Steinerovy věty jako

$$J = J_T + md^2\,,$$

kde J_T je moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm předmětu. Ten pro rotační elipsoid v dané geometrii určíme jako $J_T = \frac{1}{5}m\left(a^2 + b^2\right)$.

Po dosazení do původního vztahu tak dostáváme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2}{5} + \left(\sqrt{l^2 - \frac{L^2}{4}} + b\right)^2}{g\left(\sqrt{l^2 - \frac{L^2}{4}} + b\right)}} = 1{,}38\,\mathrm{s}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

/FYKOS ***@fykosak***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.