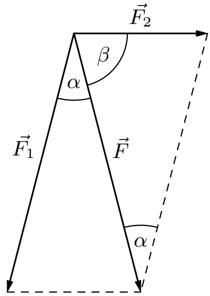
Řešení úloh Fyziklání Online 2023

FyziklaniOnline

Úloha 1 ... otáčíme sílu 3 body

Na hmotný bod působí dvě síly $F_1 = 2{,}0\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 1{,}0\,\mathrm{N}$. Jaký úhel mezi sebou svírají, pokud má jejich výslednice stejnou velikost jako větší ze sil, tedy $F = F_1$? Nechť tě provází síla.

Dôležité je situáciu si dobre zakresliť.



Obrázek 1: Rozklad sil.

Z obrázku vidíme, že dostávame 2 trojuholníky so známymi dĺžkami strán. Hľadaný uhol je $\alpha + \beta$. Keďže sú trojuholníky rovnoramenné platí $\alpha + 2\beta = 180^\circ$, stačí nám teda spočítať α, pretože $\alpha + \beta = \alpha/2 + 90^\circ$.

Uhol α spočítame pomocou kosínusovej vety ako

$$\cos\alpha = \frac{F_1^2 + F^2 - F_2^2}{2F_1F} = \frac{7}{8}\,.$$

Z toho dostávame

$$\alpha/2 + 90^\circ = \arccos\left(\frac{7}{8}\right)/2 + 90^\circ = 104{,}5^\circ\,.$$

Elena Chochoľaková
`elena.chocholakova@fykos.cz`

Úloha 2 ... pravidlo pěti vteřin 3 body

Možná jste slyšeli, že pokud vám spadne jídlo na zem, ale vy ho do pěti sekund zvednete, nedojde k jeho velké kontaminaci bakteriemi. Uvažujme proto následující případ. Na zem vám spadne kruhová jednohubka o průměru $4\,\mathrm{cm}$. Bakterie ze země se na ni okamžitě nalepí. Podle pravidla by to však nemělo vadit. Předpokládejme proto, že většina bakterií během oněch pěti sekund teprve na jídlo přileze z okolí jednohubky. Jaká by musela být jejich rychlost, aby se jejich počet na jednohubce během pěti sekund zdesetinásobil? Plošná hustota bakterií na zemi je homogenní. Jarda spadlé jídlo vždycky ofouká, aby ho mohl v klidu sníst.

Předpokládejme, že bakterie jsou chytré a jakmile jídlo spadne na zem, všechny se okamžitě dají do pohybu směrem k němu. Během pěti sekund na jednohubku zvládnou dolézt bakterie ze vzdálenosti $vt + r$, kde v je jejich rychlost, $t = 5\,\mathrm{s}$ a $r = 2\,\mathrm{cm}$ je poloměr jednohubky.

Na jednohubku se na začátku nalepí $n_1 = \sigma \pi d^2/4$ bakterií, přičemž d je průměr jednohubky a σ je plošná hustota bakterií na podlaze, kterou v okolí spadlého jídla považujeme za konstantní. Aby se jejich počet zvýšil desektrát, musí se desetkrát zvětšit i plocha kruhu, což odpovídá poloměru

$$R = \sqrt{10} r = vt + r\,,$$

odkud je potřebná rychlost bakterií

$$v = \frac{R - r}{t} = \left(\sqrt{10} - 1\right) \frac{d}{2t} = 8{,}6\,\mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}\,,$$

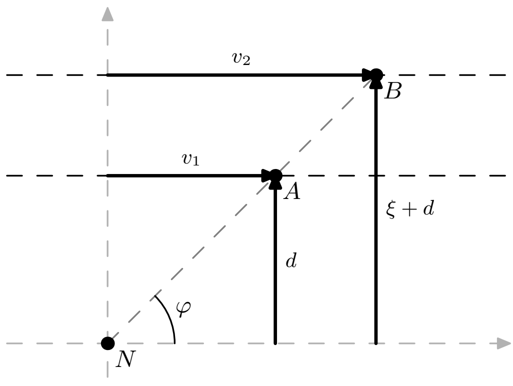
což je oproti jejich běžné rychlosti, která se pohybuje maximálně v řádech desítek mikrometrů za sekundu, nerealisticky hodně. Musíme navíc podotknout, že pravidlo pěti vteřin nikdy nebylo experimentálně dokázáno.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 3 ... hra na honěnou 3 body

Dvě auta jedou rovnoběžně po cestě stejným směrem. Vzdálenost středů pruhů, ve kterých se pohybují, je $\xi = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Nicolas je od středu bližšího pruhu vzdálený $d = 3\,\mathrm{m}$. První auto se pohybuje rychlostí $v_1 = 55\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ v bližším pruhu. Jakou rychlostí musí jet druhé auto, aby bylo z Nicolasova pohledu po celou dobu v zákrytu za prvním? Auta aproximujeme jako hmotné body. *Nicolas čekal příliš dlouho na zastávce.*

Tento príklad budeme počítať pomocou geometrie na obrázku.



Obrázek 2: Náčrt situácie.

V obrázku sme namiesto dĺžky strán využili vektory, ktoré nám vyjadrujú zmenu pozície hmotných bodov oproti počiatku. Počiatok sme určili v bode, kde Nicolas stojí a za použitia symetrie budeme riešiť iba prípad, keď v čase t_0 boli obe autá priamo pred Nicolasom a v čase t_1 sa posunuli o dráhu $s = v \cdot (t_1 - t_0)$, kde sa budú nachádzať v bodoch A a B.

Následne si môžeme všimnúť, že trojuholníky sú podobné na základe vety uu o podobnosti trojuholníkov. Podobnosť trojuholníkov je spôsobená uhlom φ a pravým uhlom na x-ovú os. Podobnosť trojuholníkov znamená, že pomery odvesien sú rovnaké,[1] to je

$$\frac{v_1 \cdot (t_1 - t_0)}{d} = \frac{v_2 \cdot (t_1 - t_0)}{d + \xi} ,$$

$$v_2 = \frac{d + \xi}{d} v_1 .$$

Po dosadení za hodnotu $v_1 = 55\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, $\xi = 1{,}5\,\mathrm{m}$, $d = 3\,\mathrm{m}$ sme určili hodnotu $v_2 \doteq 83\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Nicolas Gavorník
`nicolas.gavornik@fykos.cz`

Úloha 4 ... měníme vedení 3 body

Máme elektrické vedení, na kterém je velmi vysoké napětí $U_0 = 110\,\mathrm{kV}$, a chtěli bychom ho zvětšit na zvláště vysoké napětí $U_1 = 400\,\mathrm{kV}$. Za předpokladu, že odpor vedení bude konstantní, kolikrát se změní výkonové ztráty na vedení? Zajímá nás poměr ztrátových výkonů P_1/P_0.

Karel přemýšlel o výměně vedení.

Známe Ohmův zákon pro obvod či jeho část $U = RI$. Dále víme, že výkon elektrického proudu můžeme vypočítat jako $P = UI$. Pokud vzorec upravíme tak, že za proud dosadíme z Ohmova zákona, dostáváme

$$P = \frac{U^2}{R} .$$

Zatím jsme psali rovnici obecně, ale můžeme do ní přidat indexy 0 a 1. Budeme předpokládat kontantní odpor, takže ten necháme bez indexů. Když dáme nově vzniklé vztahy do poměru, dostáváme snadno výsledek

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\frac{U_1^2}{R}}{\frac{U_0^2}{R}} = \frac{U_1^2}{U_0^2} \doteq 13{,}2 .$$

Ztráty se zvýší na 13,2 násobek původní hodnoty. Reálně by se ztráty pravděpodobně zvýšily více, protože s větším ztrátovým výkonem by se ustálila teplota vodičů na vyšší teplotě, při které by měl vodič větší odpor.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha 5 ... plavací 3 body

Verča si chce jít zaplavat, nerada ale chodí do vody nenajezená. V hladovém stavu má totiž při nádechu průměrnou hustotu $945\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a špatně se jí potápí. Kolik kilogramů jídla musí Verča sníst, aby měla při nádechu průměrnou hustotu alespoň $980\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$? Předpokládejte, že při jídle nezmění svůj objem. Délka bazénu je $30\,\mathrm{m}$ a jeho hloubka $3{,}1\,\mathrm{m}$. Hmotnost Verči před jídlem je $47\,\mathrm{kg}$.

Verča občas uvnitř cítí velkou prázdnotu.

[1] To vychádza z toho, že pomer odvesien v oboch trojuholníkoch vieme vyjadriť pomocou goniometrickej funkcie tangens.

Najskôr si vyjadríme objem Verči V. K tomu využijeme informáciu, že pred najedením je jej priemerná hustota ρ_0 a jej hmotnosť m_0

$$V = \frac{m_0}{\rho_0}\,.$$

Jej objem sa nezmení, zatiaľ čo jej priemerná hustota sa musí zvýšiť, čiže platí

$$\frac{m_0}{\rho_0} = \frac{m_0 + \Delta m}{\rho_1}\,.$$

Po jednoduchom vyjadrení a dosadení dostaneme

$$\Delta m = m_0 \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right) = 1{,}7\,\mathrm{kg}\,.$$

Verča teda musí zjesť 1,7 kg jedla nezávisle na tom, aké je jej obľúbené jedlo. K riešeniu úlohy parametre bazéna ani neboli potrebné.

Juraj Jánošík
`juraj.janosik@fykos.cz`

Úloha 6 ... skluzavka — 3 body

Vedení Kolejí a menz se rozhodlo vynaložit peníze nějak smysluplně, a tak postavilo skluzavku ze střechy budovy A kolejí 17. listopadu rovnou ke dveřím pavilonu Impakt MFF. Obě budovy jsou od sebe vzdáleny vzdušnou čarou 430 m *a jejich výškový rozdíl je* 59 m. *Jaký je součinitel smykového tření skluzavky, jestliže se sudent vážící* 60 kg *vrhl dolů po skluzavce rychlostí* $v_0 = 8{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a na jejím konci se akorát zastavil? Předpokládejte, že skluzavka je nakloněná rovina.* *Eliška šla pozdě na přednášku.*

Pro výslednici sil působící na studenta na skluzavce platí $F = F_{\parallel} - F_t$, kde $F_{\parallel}$ je síla, která urychluje studenta dolů po skluzavce a je vodorovná s rovinou skluzavky, a naopak F_t je třecí síla, která působí proti síle $F_{\parallel}$. Navíc je výsledná síla konstantní, tedy i zrychlení na skluzavce je konstantní.

Na studenta také působí složka tíhové síly $F_{\perp}$ ve směru kolmém na plochu skluzavky, kterou kompenzuje reakce skluzavky R (taktéž kolmá na její rovinu). Síly $F_{\perp}$ a $F_{\parallel}$ jsou složkami tíhové síly F_g a platí pro ně, že mezi F_g a $F_{\parallel}$ je úhel α, který také odpovídá úhlu sklonu skluzavky a spočítáme jej jako $\alpha = \mathrm{arctg}(59\,\mathrm{m}/(430\,\mathrm{m}))$.

Protože se student rozeběhl, začal se klouzat rychlostí v_0. Na konci skluzavky se zastavil, tedy $v_1 = 0\,\mathrm{ms^{-1}}$. Pro zrychlení máme vztah

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t} = \frac{-v_0}{t}\,.$$

Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu je stejná jako rovnoměrně zpomaleného, tudíž ji můžeme spočítat jako

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}v_0 t\,,$$

když si vyjádříme čas, dostaneme

$$t = \frac{2s}{v_0}\,.$$

Dráhu s můžeme najít ze znalosti vodorovného a svislého rozměru skluzavky jako $s = l/\cos\alpha$, kde $l = 430\,\mathrm{m}$ je vzdálenost od paty kolejí až k budově Matfyzu.

Po dosazení do rovnice pro zrychlení budeme mít

$$a = \frac{-v_0}{\frac{2s}{v_0}} = -\frac{v_0^2}{2s}\,.$$

Pro normálovou sílu platí $F_\perp = F_g\cos\alpha$, pro třecí sílu tedy získáváme $F_t = fF_\perp = fF_g\cos\alpha$. Nakonec využijeme $F_\parallel = F_g\sin\alpha$ a $F = ma$. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} F &= F_\parallel - F_t\,,\\ ma &= mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha\,. \end{aligned}$$

Po úpravách (zde si můžeme všimnout, že vůbec nezáleží na hmotnosti) dostaneme, že

$$f = \frac{v^2}{2gl} + \operatorname{tg}\alpha\,,$$

a po dosazení číselných hodnot bude $f = 0{,}15$. Tak nízký součinitel vyjde, protože sklon skluzavky je hodně malý. Příště by vedení Kolejí a menz mohlo volit spíš skluzavku ve tvaru brachistochrony.

Eliška Malá
`eliska.mala@fykos.cz`

Úloha 7 ... Jardovy úlohy
3 body

Při výběru úloh na Fyziklání online Jirka spočítal, že 20 % návrhů na úlohy pochází od Jardy. Přitom je Jarda autorem neuvěřitelné třetiny ze všech úloh, které se vybraly do samotné soutěže. Uvažme, že při výběru úloh čtou organizátoři FYKOSu návrh na úlohu. Kolikrát větší je pravděpodobnost, že se úloha vybere, pokud je jejím autorem Jarda, než pokud by návrh pocházel od jiného (průměrného) organizátora?

Jirkova původní verze úlohy neprošla politickou korekturou.

Existuje více způsobů, jak úlohu vyřešit. První je úvahou. Označme N celkový počet navržených úloh a n počet vybraných úloh. Pak víme, že Jarda navrhl $0{,}2 \cdot N$ úloh a vybralo se mu jich $\frac{n}{3}$. Zajímá nás, jak kvalitní úlohy Jarda navrhuje, tedy poměr mezi počtem jeho vybraných a jeho navržených; ten je roven $n/(3 \cdot 0{,}2 \cdot N)$.

Tento poměr nyní porovnáme s poměrem pro libovolného jiného organizátora. Ostatní organizátoři navrhnou $0{,}8 \cdot N$ úloh, z nichž se vybere celkem $\frac{2n}{3}$. Poměr potom je

$$\frac{\frac{n}{3}}{0{,}2 \cdot N} : \frac{\frac{2n}{3}}{0{,}8 \cdot N} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{0{,}8}{0{,}2} = 2$$

Máme tedy, že Jardovy úlohy jsou přibližně dvakrát úspěšnější, než úlohy od ostatních organizátorů.

Alternativně bychom úlohu mohli vyřešit s využitím podmíněné pravděpodobnosti. Naším cílem je spočítat pravděpodobnost, že se úloha vybere za podmínky, že pochází od Jardy (označme ji $P(\text{vybraná} \mid \text{Jarda})$; symbol $\mid$ tedy značí „za podmínky“), a porovnat ji s pravděpodobností, že se vybere, za podmínky, že pochází od libovolného jiného organizátora.

Pro podmíněnou pravděpodobnost platí

$$P(\text{vybraná} \,|\, \text{Jarda}) = \frac{P(\text{vybraná} \cap \text{Jarda})}{P(\text{Jarda})}\,,$$

kde pravděpodobnost, že je vybraná úloha Jardova, tj $P(\text{vybraná} \cap \text{Jarda})$, vyjádříme opět prostřednictvím podmíněné pravděpodobnosti, tentokrát pomocí pravděpodobnosti, že je Jarda autorem vybrané úlohy – tedy $P(\text{Jarda}|\text{vybraná})$. O této pravděpodobnosti ze zadání víme, že je rovna 1/3.

Celkem máme

$$P(\text{vybraná} \,|\, \text{Jarda}) = P(\text{Jarda} \,|\, \text{vybraná}) \cdot \frac{P(\text{vybraná})}{P(\text{Jarda})}\,,$$

přičemž pravděpodobnost, že se úloha vybere neznáme. Podobně pro libovolného jiného organizátora (označme jako „ostatní“) máme

$$P(\text{vybraná} \,|\, \text{ostatní}) = P(\text{ostatní} \,|\, \text{vybraná}) \cdot \frac{P(\text{vybraná})}{P(\text{ostatní})}\,.$$

Nyní chceme zjistit, s kolikrát větší pravděpodobností se vybírají Jardovy úlohy, zajímá nás tedy podíl vyjádřených podmíněných pravděpodobností. Dostáváme

$$\frac{P(\text{vybraná} \,|\, \text{Jarda})}{P(\text{vybraná} \,|\, \text{ostatní})} = \frac{P(\text{Jarda} \,|\, \text{vybraná})}{P(\text{ostatní} \,|\, \text{vybraná})} \cdot \frac{P(\text{ostatní})}{P(\text{Jarda})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{0{,}8}{0{,}2} = 2\,.$$

Jiří Kohl
`jiri.kohl@fykos.cz`

Úloha 8 ... neodolatelná přitažlivost 4 body

Jindra si nemůže najít přítelkyni, a tak si z pochybného internetového obchodu objednal přitahovač žen. Přišla mu černá díra do kapsy, jež na všechna tělesa (včetně dívek) ve vzdálenosti 5 m *působí gravitačním zrychlením* $9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Spočítejte Schwarzschildův poloměr této černé díry.* *Jindra pomýšlel na reklamaci, ale spolkla ho černá díra.*

Pro Schwarzschildův poloměr černé díry platí známý vztah

$$R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2}\,, \tag{1}$$

kde G je gravitační konstanta, M je hmotnost černé díry a c je rychlost světla. Předpokládáme, že Schwarzschildův poloměr této černé díry bude řádově menší než 5 m, tudíž pro gravitační zrychlení $a = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ ve vzdálenosti $r = 5\,\mathrm{m}$ použijeme vztah z klasické fyziky

$$a = \frac{GM}{r^2}\,. \tag{2}$$

Vyjádříme hmotnost M z rovnice (1) a dosadíme do rovnice (2)

$$a = \frac{R_\mathrm{S} c^2}{2r^2}.$$

Nyní vyjádříme Schwarzschildův poloměr R_S a dosadíme čísla

$$R_\mathrm{S} = \frac{2ar^2}{c^2} \doteq 5{,}5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}\,.$$

Kapesní černá díra má Schwarzschildův poloměr $R_\mathrm{S} \doteq 5{,}5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$, tudíž se potvrdil náš počáteční předpoklad o zanedbatelném poloměru černé díry a mohli jsme použít výpočet klasické fyziky pro gravitační zrychlení.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha 9 ... odletující kapičky 4 body

Okolo vodorovné hřídele se otáčí kolo o vnějším průměru $d = 65{,}8\,\mathrm{cm}$, na něž prší. Vodní kapičky se s povrchem kola srážejí nepružně, následně se ale od něj mohou oddělit. Jaká je nejnižší možná úhlová rychlost otáčení, aby z celé horní poloviny obvodu kola odletovaly kapičky vody?

Jindra jel na kole skrz kaluže.

Přesuneme se do soustavy spojené s otáčejícím se kolem. Na kapičky vody působí tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ směrem dolů a odstředivé zrychlení $\omega^2 r$ směrem ven od osy otáčení, kde $r = 32{,}9\,\mathrm{cm}$ je poloměr kola a ω je úhlová rychlost otáčení.

Voda odletí z kola, pokud odstředivá síla překoná radiální složku tíhového zrychlení. Úhel α budeme měřit od svislice. Radiální složka tíhového zrychlení je

$$g_r = g \cos \alpha,$$

kde kladné znaménko znamená směr dovnitř, tedy ke hřídeli. Kapička nacházející se v poloze α na kole odletí, pokud

$$g \cos \alpha < \omega^2 r,$$
$$\omega^2 > \frac{g \cos \alpha}{r}.$$

Aby tato nerovnost platila pro všechny úhly α od 0 do 2π, musí být

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Po dosazení čísel ze zadání vyjde $\omega > 5{,}46\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Minimální úhlová rychlost otáčení kola, aby kapičky odletovaly po celém obvodu, je $5{,}46\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha 10 ... krademe pomocí pružinky 4 body

K tělesu o hmotnosti $m = 120\,\mathrm{g}$ přichytíme pružinku o tuhosti $k = 5{,}2\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a klidové délce $l_0 = 15\,\mathrm{cm}$. Za její druhý konec začneme tahat konstantní rychlostí $v = 65\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$. Na jakou maximální délku se pružina natáhne? Vše probíhá na hladké vodorovné podložce.

Jarda by se chtěl stát kapsářem.

Situaci si rozeberme v klidové soustavě ruky. V ní dostane na začátku těleso rychlost v. Jeho kinetická energie je tedy $mv^2/2$. Ta se celá transformuje na energii pružnosti $kx^2/2$ v okamžiku, kdy bude pružina nejvíce natažená. Její maximální délka tak bude

$$l = l_0 + v\sqrt{\frac{m}{k}} \doteq 25\,\mathrm{cm}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 11 ... uhlíkové datování 5 bodů

Zuzka odjela do Abúsíru na archeologické vykopávky. V hrobce staroegyptského hodnostáře odebrala vzorek dřeva, který odnesla na hmotnostní spektroskopii k analýze. Poměr atomů izotopů uhlíku byl ve vzorku naměřen jako $p_{^{14}\mathrm{C}/^{12}\mathrm{C}} = 9{,}22\cdot 10^{-13}$. Ve kterém roce byl hodnostář pohřben? Použijte gregoriánský kalendář, roky před naším letopočtem napište jako záporné. Poločas rozpadu ^{14}C je $T = 5\,730\,\mathrm{yr}$ a předpokládejte, že poměr izotopů v atmosféře je v historii neměnný $p_0 = 1{,}25\cdot 10^{-12}$. Předpokládejte, že strom byl pokácen krátce před pohřbením hodnostáře. *Jindra vymyslel původ úlohy až poté, co ho upozornila Terka.*

V horních vrstvách atmosféry přirozeně vznikají z dusíku ^{14}N atomy radioaktivního uhlíku ^{14}C působením kosmického záření. Prostřednictvím fotosyntézy se radioaktivní izotop uhlíku inkorporuje do rostlinných pletiv a posléze i skrz potravní řetězec do těl živočichů. Tím pádem se v živých organismech ustanoví stejný poměr p_0 izotopů uhlíku $^{14}\mathrm{C}/^{12}\mathrm{C}$ jako v atmosféře.

Po smrti živého organismu (např. při pokácení stromu) přestane výměna uhlíku s okolním prostředím. Tudíž nedochází k doplňování rozpadajícího se izotopu ^{14}C a poměr izotopů $^{14}\mathrm{C}/^{12}\mathrm{C}$ už jen s přibývajícím časem exponenciálně klesá s poločasem $T = 5\,730\,\mathrm{yr}$. Stáří hrobky t spočítáme z rovnice

$$\frac{p_{^{14}\mathrm{C}/^{12}\mathrm{C}}}{p_0} = 2^{-\frac{t}{T}}\,,$$

$$t = -T\log_2\left(\frac{p_{^{14}\mathrm{C}/^{12}\mathrm{C}}}{p_0}\right)\,,$$

$$t = 2\,516\,\mathrm{yr}\,.$$

Při odečtení stáří dřeva od současného letopočtu 2023 dojdeme k roku pohřbení 493 př. n. l., což zaokrouhlíme a do řešení napíšeme jako -490.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 12 ... zvídavý cyklista 4 body

Kuba si koupil nový bicykl a chtěl by zjistit velikost ramene valivého odporu ξ jeho kol. Všiml si, že se na kole rozjíždí samovolně z kopce, pokud rovina svahu svírá s vodorovnou rovinou úhel větší než $\alpha = 0{,}5\,^\circ$. Průměr kol bicyklu je $d = 67\,\mathrm{cm}$. Dokážeš Kubovi pomoci?

Kuba rád jezdí na kole.

Pokud Kuba pojede dolů ze svahu, který má odchylku od vodorovného směru rovnu α, tak síla ve směru pohybu cyklisty $\vec{F_1}$ a odporová síla valivého odporu $\vec{F_v}$ budou v rovnováze. Bicykl se tedy bude pohybovat rovnoměrným přímočarým pohybem a platí

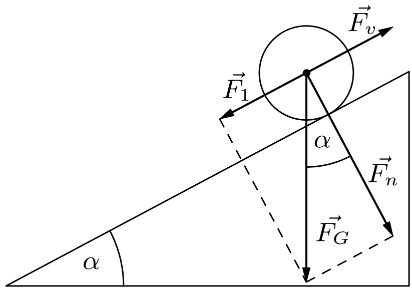
$$F_1 = F_v = F_n \frac{\xi}{d/2} .$$

Z obrázku je vidět, že $F_1 = F_G \sin(\alpha)$ a $F_n = F_G \cos(\alpha)$, takže

$$F_G \sin(\alpha) = F_G \cos(\alpha) \frac{\xi}{d/2} .$$

Po vyjádření ξ a dosazení dojdeme k výsledku

$$\xi = \frac{d}{2} \operatorname{tg}(\alpha) \doteq 2{,}9\,\mathrm{mm} .$$



Obrázek 3: Rozklad sil. Bicykl nezrychluje, takže pohybová a odporová síla jsou v rovnováze. Tíhová síla působí svisle dolů a tlaková síla působí kolmo na podložku.

Jakub Smolík
`jakub.smolik@fykos.cz`

Úloha 13 ... nesení krabice 5 bodů

Lego se při nesení krabice zamyslel, jakou silou na ni vlastně působí. Krabice má hmotnost $m = 7{,}5\,\mathrm{kg}$ a tvar kvádru. Lego ji drží tak, že tlačí na dvě protilehlé (a svislé) stěny, přičemž koeficient tření mezi stěnami a Legovýma rukama je $f = 0{,}45$. Jaká je velikost síly, kterou působí jedna Legova ruka na krabici? *Lego na soustředění nosil hodně věcí.*

Ruky tlačia na krabicu z opačných strán, čiže obe musia tlačiť rovnakou normálovou silou, označme si ju F_N. Potom trecia sila medzi každou z rúk a krabicou je $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{N}$. Na krabicu pôsobí tiaž $F_g = mg$. Aby Lego krabicu uniesol, trecie sily medzi krabicou a rukami musia vykompenzovať túto silu. To znamená

$$2F_\mathrm{t} = F_g ,$$
$$2fF_\mathrm{N} = mg ,$$
$$F_\mathrm{N} = \frac{mg}{2f} .$$

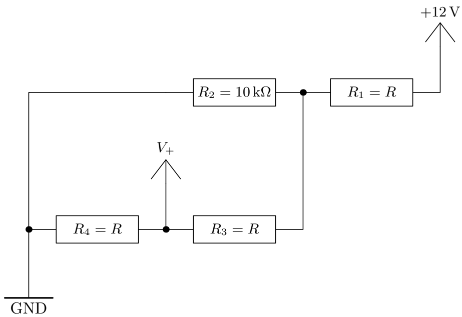
Niekto by asi čakal, že to je výsledok, to ale nie je pravda! Ide o to, že aj trecia sila medzi krabicou a rukou je sila, ktorou ruka pôsobí na krabicu. Každá ruka teda pôsobí na krabicu silami F_N a F_t, pričom tieto sily sú na seba kolmé, ak teda chceme vedieť veľkosť výslednej sily, ktorou ruka na krabicu pôsobí, dostaneme ju ako

$$|F| = \sqrt{F_\mathrm{N}^2 + F_\mathrm{t}^2} = F_\mathrm{N}\sqrt{1+f^2} = \frac{mg}{2f}\sqrt{1+f^2} = 90\,\mathrm{N}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 14 ... dělič No.1 4 body

Petr potřeboval zdroj napětí $3\,\mathrm{V}$, měl však jen $12\,\mathrm{V}$ zdroj a rezistory. Rozhodl se tak sestavit odporový dělič ze schématu na obrázku 4. Jakou musel Petr zvolit hodnotu R, aby na V_+ byly $3\,\mathrm{V}$? Chtěl jsem si zavzpomínat na elektrotechniku.



Obrázek 4: Schéma zapojeného obvodu

Již název úlohy nám napovídá, že se bude jednat o odporový dělič (někdy nazývaný napěťový dělič). Odporový dělič jsou dva odpory zapojené v sérii, kde napětí na druhém odporu (podle směru proudu) používáme jako zdroj. Známe vzorec napětí nezatíženého odporového děliče na druhém odporu v sérii, a to

$$U_{R_2} = U_\mathrm{in}\frac{R_2}{R_1+R_2}\,,$$

kde U_in je napětí na celém sériovém zapojení a U_out je napětí na druhém rezistoru. Pro zatížený dělič nám platí

$$U_{R_2} = U_\mathrm{in}\frac{R_2R_\mathrm{L}}{R_1R_2 + R_1R_\mathrm{L} + R_2R_\mathrm{L}}\,,$$

kde R_L je odpor zátěže připojený paralelně k R_2.

Nejprve si uvědomíme, že jde o dva odporové děliče, kde ten druhý používá výstupní napětí prvního děliče jako své vstupní napětí. První dělič je však zatížený druhým a ze schématu je zřejmé, že odpor zátěže je $R_3 + R_4 = 2R$. Taktéž si povšimneme, že v druhém děliči jsou oba odpory stejné a z předchozího vzorce pro nezatížený dělič vyplývá, že jeho výstupní napětí bude vždy polovina jeho vstupního napětí. Stačí nám tedy řešit obvod pro výstupní napětí prvního děliče. Poté už aplikujeme vzorec pro napětí zatíženého odporového děliče a dostaneme, že

$$U_{\mathrm{out}} = U_{\mathrm{in}} \frac{R_2 \cdot 2R}{R_2 \cdot R + 2R^2 + R_2 \cdot 2R} \frac{1}{2} \,,$$

z toho sestavíme rovnici pro R

$$R = \frac{R_2 U_{\mathrm{in}} - 3 R_2 U_{\mathrm{out}}}{2 U_{\mathrm{out}}} \,,$$

po dosazení hodnot ze zadání nám vyjde

$$R = 5\,000\,\Omega \,.$$

Petr Kahan
petr.kahan@fykos.cz

Úloha 15 ... ocelová koule plave 4 body

Karel našel ocelový plech o tloušťce $\Delta r = 0{,}84\,\mathrm{mm}$ a přemýšlel, co s ním. A protože má Karel rád experimenty, rozhodl se, že z něj vyrobí dutou kouli o takovém poloměru, aby při položení do vody byla právě polovina nad hladinou a polovina pod hladinou. Uvažujte, že tloušťka stěn koule bude právě Δr a že hustota oceli je $\rho' = 7\,840\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Najděte vnější poloměr této koule.

Karel přemýšlel na lodi.

Nech m je hmotnosť guličky a ρ_{v} hustota vody. Gulička má polovicu svojho objemu ponorenú vo vode. V rovnováhe musí byť vztlaková sila vyrovnaná s tiažovou, takže dostaneme rovnicu

$$mg = \frac{V}{2} \rho_{\mathrm{v}} g \,,$$

odkiaľ po pokrátení g dostaneme

$$\frac{m}{V} = \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{2} \,.$$

Teraz vyjadríme hustotu guličky ako $\rho = \frac{m}{V}$, kde V je celkový objem guličky a m hmotnosť plechu, z ktorého ju vyrobíme. Hmotnosť plechu určíme pomocou jeho hustoty a objemu, ktorý je tvorený výsekom dvoch gulí. Objem plechu teda bude $V' = \frac{4}{3}\pi \left(r^3 - (r - \Delta r)^3\right)$, kde r je polomer guličky. Dosadením do rovnice a úpravou dostaneme

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho' \left(r^3 - (r - \Delta r)^3\right)}{r^3} \,,$$

pričom hmotnosť vzduchu vnútri gule sa s veľkou presnosťou vyrovná so vztlakovou silou vzduchu, pôsobiacu na časť gule, ktorá je nad hladinou.

Dosadením do rovnice pre rovnosť síl dostaneme rovnicu tretieho stupňa:

$$0 = \rho' \left(r^3 - (r - \Delta r)^3\right) - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{2} r^3 \,,$$

ktorú numericky vyriešime. Riešenia dá jeden reálny koreň a dva komplexné. Reálny koreň je $r = 0{,}0387\,\mathrm{m} = 3{,}87\,\mathrm{cm}$, čo je hľadaný polomer.

Juraj Jánošík
juraj.janosik@fykos.cz

Úloha 16 ... modifikovaná sluneční soustava 5 bodů

Představme si, že by Slunce mělo efektivní teplotu $T_2 = 8\,000\,\mathrm{K}$. O kolik procent by se musela prodloužit perioda oběhu Jupitera, aby na něj dopadal stejný výkon, jako je tomu nyní?

Danka se snažila vymyslet zajímavou úlohu.

Podľa Stefanovho-Boltzmannovho zákona je tepelný výkon hviezdy (absolútne čierneho telesa)

$$L = S_{\odot}\sigma T^4 \,,$$

kde $S_{\odot}$ je plocha povrchu hviezdy, T jeho teplota a σ je Stefanova-Boltzmannova konštanta.

Slnko vyžaruje rovnomerne do celého priestoru. Planéta zachytí časť tejto energie, ktorá je úmerná ploche prierezu planéty. Teda chceme aby platilo

$$\pi r_{\mathrm{J}}^2 \frac{L_1}{4\pi d_1^2} = \pi r_{\mathrm{J}}^2 \frac{L_2}{4\pi d_2^2} \,,$$

kde r_{J} je polomer Jupitera a d_1, resp. d_2 je jeho vzdialenosť od Slnka pre teploty povrchu T_1, resp. T_2. Dosadíme za tepelný výkon L z prvej rovnice a úpravami dostaneme

$$d_2 = d_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \,.$$

Periódy obehu planét okolo Slnka budú zviazané tretím Keplerovým zákonom

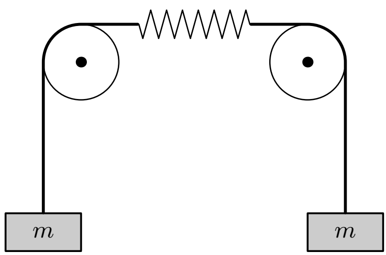
$$\frac{t_1^2}{d_1^3} = \frac{t_2^2}{d_2^3} \,,$$

odkiaľ už nájdeme hľadané predĺženie ako

$$p = \frac{t_2 - t_1}{t_1} = \left(\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3 - 1\right) = \left(\left(\left(\frac{4\pi R_{\odot}^2\sigma}{L_1}\right)^{\frac{1}{4}} T_2\right)^3 - 1\right) = 166\,\% \,.$$

Daniela Dupkalová
`daniela@fykos.cz`

Úloha 17 ... kladky s pružným lanem 4 body



Lego má rád úlohy s kladkami. Tentokrát ale chtěl vymyslet úlohu, která by modelovala fakt, že lano má nějakou pružnost. Rozhodl se to udělat tak, že dokonale tuhé nehmotné lano uprostřed rozdělí a poté spojí pomocí nehmotné pružiny s tuhostí $k = 78\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Následně takto modifikované lano položil na dvě pevné kladky umístěné ve stejné výšce a na každý jeho konec zavěsil závaží s hmotností $m = 9{,}0\,\mathrm{kg}$. Potom podržel obě závaží přesně takovou silou, aby napětí v laně bylo $T = 12\,\mathrm{N}$. S jakým zrychlením se budou závaží pohybovat, jestliže je pustíme naráz?

Lega napadla, když na soustředění přednášel o kladkách.

Rýchly spôsob riešenia je úvaha, že na kváder bude pôsobiť tiažová sila mg smerom nadol a sila od lana smerom nahor. Pričom pružinka sa v momente pustenia ešte nemala kedy roztiahnuť oproti stavu, v ktorom bola, keď sme kvádre držali. Tým pádom bude na lano pôsobiť silou T a teda napätie v nehmotnom lane stále musí byť T. Takže na oba kvádre pôsobí výsledná sila $mg - T$ a teda sa budú pohybovať so zrýchlením $a = g - T/m \doteq 8{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Popíšeme si ale aj zložitejší spôsob (nakoľko ten napríklad mne napadol skôr). Celá situácia je symetrická vzhľadom na stred pružinky, ten sa preto nebude pohybovať. Môžeme si teda predstaviť, že tento bod je dokonale pevne uchytený k nejakej stene. Dostávame teda situáciu, kedy kváder s hmotnosťou m kmitá na polovičnej pružinke. Čiže efektívne na pružinke s tuhosťou $2k$. Uhlová frekvencia kmitania bude $\omega = \sqrt{2k/m}$.

Rovnovážna poloha bude vtedy, keď bude táto polovica pružinky predĺžená o $l_r = mg/2k$ oproti svojej kľudovej dĺžke. Kvádre vypúšťame, keď je v lane napätie T, vtedy musí byť polovica pružinky predĺžená o $l_m = T/2k$. Nakoľko závažie púšťame z pokoja, bude v momente vypustenia v maxime a veľkosť amplitúdy kmitavého pohybu teda bude $l_a = l_r - l_m = (mg - T)/2k$. Zároveň okrem polohy bude v amplitúde aj zrýchlenie, ktorého veľkosť teda bude

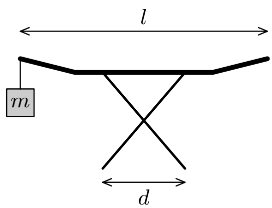
$$a = l_a\omega^2 = \frac{mg - T}{2k}\frac{2k}{m} = g - \frac{T}{m} \doteq 8{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 18 ... padá sušák

4 body

Matěj má doma sušák na prádlo o šířce $l = 180\,\mathrm{cm}$, na který po praní rovnoměrně rozmístí své oblečení. Na levý okraj sušáku si přitom odloží pevné závaží o hmotnosti $m = 3\,\mathrm{kg}$. Za jak dlouho po rozvěšení prádla se sušák převrátí, pokud je rozpětí jeho nohou $d = 60\,\mathrm{cm}$? Hmotnost mokrého oblečení je $M_0 = 6\,\mathrm{kg}$; ta se po vysušení sníží na $M_1 = 2\,\mathrm{kg}$. Hmotnost sušáku samotného je $2\,\mathrm{kg}$. Pro jednoduchost uvažujte, že se voda odpařuje konstantní rychlostí a oblečení uschne za 1 den.



Matěj si neumí usušit prádlo.

Hmotnost sušáku označme M_s. Polohu těžiště celé soustavy můžeme spočítat jako vážený průměr poloh těžišť jednotlivých těles. Na počátku schnutí je tedy celkové těžiště vzdáleno

$$x_0 = \frac{m\frac{l}{2}}{m + M_0 + M_\mathrm{s}} = 24{,}5\,\mathrm{cm}$$

od středu sušáku. Po uschnutí prádla je to

$$x_1 = \frac{m\frac{l}{2}}{m + M_1 + M_\mathrm{s}} = 38{,}6\,\mathrm{cm}\,,$$

což je více než $x_\mathrm{max} = 30\,\mathrm{cm}$, a proto se sušák v nějakém okamžiku musí převrátit. Ze vztahu výše vyjádříme hmotnost prádla a za polohu těžiště dosadíme x_max, čímž dostaneme minimální hmotnost prádla, při které ještě nedojde k převržení

$$M_\mathrm{min} = \frac{ml}{2x_\mathrm{max}} - m - M_\mathrm{s} = 4\,\mathrm{kg}\,.$$

Pakliže prádlo schne rovnoměrnou rychlostí, vyschne na tuto kritickou hmotnost za $\frac{M_{\min}-M_1}{M_0-M_1} = 1/2\,\text{dne}$, čili 12 hodin.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha 19 ... akustický tachometr

5 bodů

Když auto stojí, dopadne na jeho čelní sklo 80 *kapek za vteřinu. Jakou rychlostí jede, jestliže je nyní frekvence dopadů* $230\,\mathrm{s^{-1}}$*? Sklo má plochu S a je nakloněné pod úhlem 33° vůči zemi. Kapky deště padají kolmo k zemi rychlostí* $4{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. *Jarda se bál pokuty za rychlou jízdu.*

Najděme počet kapek, které spadnou na sklo za jednu sekundu. Označme rychlost, kterou padají, jako v a jejich objemovou hustotu ve vzduchu jako n. Pak na stojící sklo spadne během jedné sekundy

$$f_1 = nvS\cos\alpha$$

kapek.

Situace je ovšem trochu složitější v případě, kdy se auto pohybuje rychlostí u. Nyní je objem, který přední sklo auta za jednotku času sesbírá, roven

$$Q = uS\sin\alpha + vS\cos\alpha\,,$$

vidíme tedy, že zde přibyl jeden člen. Z rozdílu frekvencí dostáváme

$$f_2 - f_1 = nuS\sin\alpha\,,$$

odkud pak jednoduše vyjádříme finální rychlost auta

$$u = \frac{f_2 - f_1}{nS\sin\alpha} = v\frac{f_2 - f_1}{f_1\operatorname{tg}\alpha} = 47\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 20 ... synchrotron v Grenoblu

5 bodů

V synchrotronu ESRF v Grenoblu obíhají elektrony s energií $6{,}03\,\mathrm{GeV}$ *po dráze o obvodu* $844{,}4\,\mathrm{m}$, *přičemž vytváří proud* $35{,}8\,\mathrm{mA}$. *Kolik elektronů se tak v jednu chvíli nachází v celém synchrotronu?* *Jarda se účastnil difrakčního experimentu.*

Jelikož je klidová hmotnost elektronů $E_0 = 511\,\mathrm{keV}$ zanedbatelná vůči jejich celkové energii $E = 6{,}03\,\mathrm{GeV}$, pohybují se silně relativisticky. Můžeme vypočítat jejich rychlost, vyjdeme-li z rovnice

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,,$$

kde v je jejich rychlost a c je rychlost světla. Dostaneme

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} = 0{,}999\,999\,996\,.$$

Dále proto vzhledem k přesnosti zadaných veličin a požadavku na přesnost výsledku můžeme počítat s hodnotou $v = c$.

Frekvence obíhání elektronů v synchrotronu je $f = c/l$, kde $l = 844{,}4\,\mathrm{m}$ je obvod synchrotronu. Proud vytvořený jedním elektronem tak je $I_\mathrm{e} = ef$, kde e je elementární náboj.

Celkový počet elektronů je pak jednoduše

$$N = \frac{I}{I_\mathrm{e}} = \frac{I}{ef} = \frac{Il}{ec} = 630 \cdot 10^9 \,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 21 ... maximální pétanque 6 bodů

Vojta hrál pétanque, ale vážně mu to nešlo. Proto se naštval a rozhodl se kouli, kterou právě držel v ruce, zahodit co nejdál. Pod jakým úhlem ji musí vyhodit rychlostí $v = 11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, aby se dostala co nejdál, jestliže se koule po dopadu ještě kutálí? Po dopadu na zem je absorbována jen vertikální složka rychlosti, koule neprokluzuje a součinitel valivého odporu je $c = 0{,}17$. Předpokládejte, že koule dopadne na nedalekou vodorovnou vyvýšeninku, a to do stejné výšky, v jaké opustila Vojtovu ruku. *Vojta nepochopil pravidla pétanque.*

Délku vrhu určíme dle známého vztahu jako

$$d_\mathrm{v} = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha \,,$$

kde $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ značí hledaný úhel vrhu. Pokud se absorbuje veškerá vertikální složka rychlosti, bude mít koule o hmotnosti m bezprostředně po dopadu kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m \left(v \cos\alpha\right)^2 \,,$$

proti které bude konat práci valivý odpor. Podmínkou zastavení koule tedy bude

$$E_\mathrm{k} = d_\mathrm{k} mgc \quad \Rightarrow \quad d_\mathrm{k} = \frac{1}{2cg} \left(v \cos\alpha\right)^2 \,,$$

celkem tedy koule urazí vzdálenost

$$d = d_\mathrm{k} + d_\mathrm{v} = \frac{v^2}{g} \left(\frac{1}{2c} \cos^2\alpha + \sin 2\alpha \right) \,.$$

Aby byla tato vzdálenost maximální, musí být maximální výraz

$$\frac{1}{2c} \cos^2\alpha + \sin 2\alpha \,.$$

Derivujme tedy podle α a položme rovno nule

$$-\frac{1}{2c} 2 \cos\alpha \sin\alpha + 2 \cos 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} 2\alpha = 4c \,,$$

odkud dostáváme onen optimální úhel jako 17°.

Poznamenejme, že pokud neformálně položíme $c = \infty$, dostaneme onen známý výsledek 45°, který odpovídá situaci, kdy se koule nekutálí.

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Úloha 22 ... preparace válce

5 bodů

Mějme homogenní válec. Kolem jeho osy z něj vyřízneme menší válec. Dutý i menší válec pak pustíme z nakloněné roviny. Jaký poloměr má menší válec, jestliže se rozjíždí s o 20 % větším zrychlením než zbytek většího válce? Uveďte v násobcích původního poloměru.

Jarda chtěl zadat úlohu bez jediného čísla. Nepovedlo se.

Při pohybu po nakloněné rovině platí pro odvalující se těleso o hmotnosti m zákon zachování energie ve tvaru

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 , \tag{3}$$

kde g je tíhové zrychlení, h je výška, o kterou těleso sestoupilo, v je rychlost, kterou získá jeho střed, J je moment setrvačnosti vůči ose symetrie a ω je úhlová rychlost otáčení. Pro válec platí $J = \frac{1}{2}mr^2$, kde r je jeho poloměr. V případě, že těleso neprokluzuje, musí platit $\omega r = v$.

Na nakloněné rovině pouštíme dvě tělesa o různé hmotnosti a poloměru. Pro každé z nich spočítáme jeho zrychlení. Označme hmotnost původního válce M, jeho poloměr R, hmotnost malého válce jako m a jeho poloměr jako r.
Pro malý válec platí

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2 . \tag{4}$$

Zákon zachování energie má tedy tvar

$$mgh_1 = \frac{3}{4}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{2}{3}g\sin\alpha ,$$

kde jsme indexem 1 označili změnu výšky, rychlost a zrychlení válce a α je úhel náklonu roviny vůči vodorovnému směru. Ke zrychlení jsme přišli úplnou časovou derivací zákona zachování energie, neboť $\dot{h}_1 = v_1 \sin\alpha$ a $\dot{v_1^2}/2 = a_1 v_1$, přičemž v_1 se pak na obou stranách rovnice pokrátilo.

Hmotnost velkého válce je $M - m$ a jeho moment setrvačnosti vůči ose symetrie je

$$\frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2 .$$

Pravé strana rovnice 3 tak je

$$\frac{1}{2}\left(M-m\right)v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(M-m\right)v^2 + \frac{1}{4}\left(MR^2 - mr^2\right)\frac{v^2}{R^2} . \tag{5}$$

Stejným procesem jako o kousek výše najdeme zrychlení zbytku válce jako

$$\left(M-m\right)gh_2 = \frac{1}{2}\left(M-m\right)v_2^2 + \frac{1}{4}\left(MR^2 - mr^2\right)\frac{v_2^2}{R^2} ,$$

odkud

$$a_2 = \frac{M-m}{\left(M-m\right) + \frac{1}{2}\left(M - m\frac{r^2}{R^2}\right)} g\sin\alpha .$$

Z podmínky $\frac{a_1}{a_2} = K = 1,2$ pak dostáváme rovnici

$$3M - 2m - m\frac{r^2}{R^2} = 3KM - 3Km .$$

Vyjádříme m a M pomocí r a R, délky válce h a hustoty ρ jako $m = \pi r^2 h\rho$ a $M = \pi R^2 h\rho$. Dosazením do předchozí rovnice a po vykrácení π, h a ρ dostáváme bikvadratickou rovnici

$$r^4 + (2 - 3K)\, R^2 r^2 + 3\,(K - 1)\, R^4 = 0\,,$$

kde proměnná je r^2. Řešením této rovnice je

$$r^2 = \frac{-\,(2 - 3K) \pm \sqrt{(2 - 3K)^2 - 12\,(K - 1)}}{2} R^2 = \frac{-2 + 3K \pm (4 - 3K)}{2} R^2\,.$$

Zvolíme-li znaménko +, dostaneme $r = R$ a nezávislost na K, což nedává smysl. Volíme proto znaménko −, což vede na

$$r = \sqrt{3\,(K - 1)}R\,.$$

Vidíme, že se nikdy nemůže stát, aby zbytek válce jel rychleji než malý válec. Zároveň ale úloha nemá řešení ani pro $K > \frac{4}{3}$, protože pak vyjde $r > R$. Pokud $r \to R$, stává se ze zbytku válce obruč a dosahuje zrychlení $\frac{1}{2} g \sin\alpha$. Po dosazení $K = 1,2$ dostáváme hledaný výsledek

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{3}{5}} \doteq 0{,}775\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 23 ... potkani na sobě 4 body

Představme si hromadu potkanů, z nichž každý má hmotnost m. Potkany uspořádáme do 2D pyramidy podobné Pascalově trojúhelníku. Na vrcholku bude jeden potkan, pod ním dva, v další řadě tři a tak dále. Máme jich hodně, limitně nekonečno. Každý potkan rozkládá svou váhu i váhu, kterou nese, na potkany pod sebou. Jakou celkovou hmotnost musí unést nohy potkana, který je úplně vlevo dole? Výsledek udejte jako násobek m. Pokud by byl nekonečný, zadejte 0. *Uvažujte, že jsou potkani v homogenním tíhovém poli.*

Karel se zamýšlel nad Járou (da) Cimrmanem.

Hlavní obtížnost úlohy spočívá v rozsahu zadání a v pochopení otázky samotné. Nabízí se hned několik možných přístupů. Praktickou variantou je udělat si například v Excelu tabulku a podívat se, k čemu se hodnoty blíží; a skutečně se již po několika řádcích začnou ustalovat okolo $2m$.

Alternativou je ručně si napočítat členy. Hmotnost, kterou musí ustát potkan v každé další řadě, dostaneme tak, že vždy vezmeme polovinu z břemene potkana předchozího a přičteme m, což reprezentuje hmotnost potkana samotného (na tu nesmíme zapomenout, neboť se zadání ptá na celkovou hmotnost, kterou musí potkanovy nohy unést). Pro jednoduchost uvažujme pouze násobky m – nese-li potkan v n-té řadě vlevo hmotnost m_n, označíme $a_n = m_n/m$. Pišme

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = \frac{3}{2}\,, \quad a_3 = \frac{7}{4}\,, \quad a_4 = \frac{15}{8}\,, \quad \dots$$

Po dalších pár pokusech to vypadá, že se stále dostáváme blíž k hodnotě 2 – v tomto se tento přístup podobá předchozímu zmíněnému. U obou ovšem nevíme úplně jistě, jestli je hodnota 2 skutečně přesná, ale v rámci soutěže po zadání zjistíte, že ano.

Lepší postup je uvědomit si, co platí pro jednotlivé členy

$$a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{a_{n-3}}{8} = \dots = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}\,,$$

kde v zápise vpravo volíme sčítací index i od 0 do $n-1$, aby suma odpovídala skutečné situaci. Nyní můžeme vypočítat limitu pro $n \to \infty$, resp. sečíst nekonečnou geometrickou řadu, čímž dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\,.$$

Dostali jsme tak skutečně očekávaný výsledek 2.

Ukážeme ještě jeden, doposud nejvíce trikový postup, který nám taktéž dá správný výsledek. Předpokládejme, že výsledek známe, označme jej třeba x. Pokud se naše posloupnost skutečně blíží nějakému reálnému číslu, musí platit, že o jednu řadu výš je výsledek prakticky stejný; sestavíme tedy rovnici

$$x = 1 + \frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2\,.$$

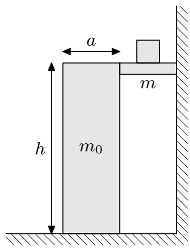
Dostali jsme tak opět výsledek, že násobek hmotnosti m, který nese levý spodní (či pravý spodní) potkan, je 2. Tento postup je asi nejrychlejší.

Výsledek je ve všech případech platný pouze pro poslušné potkany, kteří zatěžují rovnoměrně své kamarády pod sebou, stojí všichni v homogenním tíhovém poli a je jich nekonečné množství. Akorát chudáci ti uprostřed, protože ponesou nekonečnou zátěž. *Ale čím víc potkanů, tím snad i větší nenávist vůči nim, jak si klasik, Jára Cimrman, přál ve svých pedagogických pravidlech.*

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha 24 ... postmoderní umění 5 bodů

Lego chtěl vytvořit sousoší. Vzal proto kvádr hmotnosti $m_0 = 18{,}5\,\mathrm{kg}$ se čtvercovou podstavou o straně délky $a = 60{,}0\,\mathrm{cm}$ a výšce $h = 185\,\mathrm{cm}$, který postavil vedle pevné stěny (stěny kvádru jsou s ní rovnoběžné). Následně mezi kvádr a stěnu vložil desku tak, že jen díky tření držela ve vodorovné poloze ve výšce h. Koeficienty tření mezi deskou a kvádrem i deskou a stěnou jsou $f = 0{,}42$. Koeficient tření mezi kvádrem a zemí je efektivně nekonečný. Lego chce ještě doprostřed desky položit závaží. Jaký může být největší součet hmotností závaží a desky, aby ji tam kvádr udržel? Deska i kvádr jsou homogenní. *Legovy úlohy se vyvíjejí.*



Zaujíma nás, kedy kváder neudrží dosku. Vieme, že trenie medzi kvádrom a zemou je efektívne nekonečné, čiže kváder nezačne prešmykovať (môžeme si to predstaviť tak, že za kvádrom je na zemi zarážka, ktorá ho nepustí ďalej). Sily pôsobiace na kváder teda v princípe vždy môžu byť v rovnováhe. Čo teda môže spôsobiť, že kváder dosku neudrží? Môže sa stať, že momenty síl nebudú v rovnováhe. Inými slovami: síce by sa mohlo zdať, že vďaka neobmedzenému treniu medzi kvádrom a zemou môže kváder na dosku tlačiť ľubovoľnou silou, to ale nie je pravda, pretože pre niektoré veľkosti síl by sa kváder začal prevracať. Takými silami na dosku pôsobiť nemôže, čiže pre prípady, kedy by bola potrebná taká sila na udržanie dosky, doska spadne.

Bude nás teda zaujímať celkový súčet momentov síl pôsobiacich na kváder. Ako os otáčania si zvolíme zadnú hranu na zemi, nakoľko to je hrana, okolo ktorej by sa kváder začal prevracať, keby bola sila, ktorou naňho tlačí doska príliš veľká.

Aké všetky sily na kváder pôsobia? Je to tiaž, normálová a trecia sila medzi ním a doskou a normálová a trecia sila medzi ním a zemou. Postupne si tieto sily, a hlavne ich momenty, v tomto poradí rozoberieme.

Kváder má hmotnosť m_0, čiže tiaž kvádra má veľkosť $m_0 g$. Keďže kváder je homogénny, bude táto sila pôsobiť v jeho strede, a teda v horizontálnej vzdialenosti $a/2$ od zadnej hrany. Moment sily, ktorým táto sila pôsobí na kváder teda bude

$$M_g = \frac{1}{2} a m_0 g\,.$$

Poďme teraz na sily medzi kvádrom a doskou. Označme si súčet hmotnosti dosky a závažia ako m. Dosku tlačia nahor iba sily trenia, a to medzi ňou a stenou a medzi ňou a kvádrom. Trecia sila sa dá spočítať ako koeficient trenia f (ktorý je pre obe tieto dvojice povrchov rovnaký) násobený normálovou silou, ktorá tlačí tieto 2 povrchy k sebe. Keďže doska sa zjavne nepohybuje vo vodorovnom smere, musia byť sily v tomto smere vyvážené. Teda normálová sila na jednej strane dosky musí byť rovnako veľká ako tá na druhej. Ak si označíme túto silu F_N, tak trecia sila na každej strane bude $F_\mathrm{t} = f F_\mathrm{N}$. Súčet trecích síl musí vykompenzovať tiaž dosky a závažia, čiže $mg = 2F_\mathrm{t}$. Odtiaľ môžeme vyjadriť silu, ktorou na seba kváder s doskou tlačia ako $F_\mathrm{N} = mg/(2f)$.

Akými momentami budú tieto 2 sily na kváder pôsobiť? Trecou silou bude doska tlačiť kváder dole, a teda tento moment bude pôsobiť rovnakým smerom ako moment od tiaže samotného kvádra. Vodorovná vzdialenosť pôsobiska tejto sily od osi otáčania je a, preto moment od trecej sily je

$$M_\mathrm{t} = aF_\mathrm{t} = \frac{1}{2} amg\,.$$

Moment od normálovej sily medzi doskou a kvádrom bude roztáčať kváder v opačnom smere než moment od tiažovej a trecej sily, takže mu priradíme opačné znamienko. Táto sila je vodorovná, čiže jej rameno bude rovné zvislej vzdialenosti pôsobiska a osi otáčania, čiže h. Spolu teda tento moment bude

$$M_\mathrm{N} = -hF_\mathrm{N} = -\frac{1}{2f} hmg\,.$$

Zostáva nám ešte pôsobenie medzi kvádrom a zemou. Trenie pôsobí v rovine zeme, je teda zrejmé, že vzhľadom na os otáčania bude pôsobiť nulovým momentom. Čo ale s normálovou silou? Tá je vo všeobecnosti nejako spojito rozložená po celej styčnej ploche. V prípade, keby na kváder nepôsobili žiadne vonkajšie sily, bolo by to rozloženie rovnomerné a mohli by sme teda počítať, že normálová sila pôsobí v strede podstavy. Avšak keď bude na kváder pôsobiť nejaká sila, toto rozloženie sa zmení. Môžete si to skúsiť – postavte sa rovno, keď na vás kamarát spredu zatlačí, aj keď vás neprevráti, „váha sa vám presunie na päty“. Podľa čoho sa ale presne toto rozloženie mení? No podobne ako trecia sila je práve taká, aby sa predmet nešmýkal (až pokiaľ niečo neprekoná jej maximálnu veľkosť), tak toto rozloženie normálovej sily je presne také, aby sa predmet neprevrátil (pokiaľ nie je pôsobiaci moment až príliš veľký).

Moment normálovej sily od zeme bude kváder roztáčať v rovnakom smere ako moment od normálovej sily od dosky. V hraničnej situácii, keď bude normálová sila medzi kvádrom a doskou maximálna možná, bude teda normálová sila medzi zemou a kvádrom pôsobiť celá v osi otáčania (lebo tam má nulový moment). Ak by nepôsobila celá tam, a teda mala nenulový moment, znamenalo by to, že je možné silu medzi kvádrom a doskou ešte zvýšiť, lebo dostatočne malé zvýšenie by len zavážilo kváder viac dozadu. Čiže keď sa zaujímame o maximálnu možnú hmotnosť dosky a závažia, momenty síl medzi kvádrom a zemou musíme brať nulové vzhľadom na nami zvolenú os otáčania.

Dostávame teda rovnosť, ktorá bude platiť v hraničnom prípade

$$
\begin{aligned}
M_g + M_\mathrm{t} + M_\mathrm{N} &= 0\\
\frac{1}{2}am_0g + \frac{1}{2}amg - \frac{1}{2f}hmg &= 0\\
m = \frac{m_0}{\frac{h}{fa} - 1} &= 2{,}92\,\mathrm{kg}\,,
\end{aligned}
$$

to je maximálna možná hmotnosť m, akú kváder udrží.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 25 ... led v kostce 5 bodů

Led o hmotnosti $15\,\mathrm{g}$ *a teplotě* $0\,^\circ\mathrm{C}$ *uzavřeme za normální teploty a tlaku vzduchu do těsnící krychlové nádoby o objemu* $0{,}10\,\mathrm{l}$ *a začneme ji zahřívat. Jaký tlak bude v kostce působit, až bude uvnitř teplota* $120\,^\circ\mathrm{C}$*?* *Jarda chtěl účastníky nachytat, ale nachytal se sám.*

Nejprve zkusíme výpočet s vodou jako ideálním plynem, poté se ovšem nad naším výsledkem zamyslíme a zavrhneme jej.

Objem vzduchu v kostce je na začátku $V_\mathrm{v} = V - m/\rho_\mathrm{L} = 83{,}6\,\mathrm{cm^3}$, kde $m = 15\,\mathrm{g}$ je hmotnost a $\rho_\mathrm{L} = 916{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ hustota ledu při teplotě $0\,^\circ\mathrm{C}$. Protože je to vzduch za normálních podmínek, můžeme ze stavové rovnice určit látkové množství, které v kostce je, jako

$$
n_\mathrm{v} = \frac{p_\mathrm{n}V_\mathrm{v}}{RT_\mathrm{n}} = 3{,}48\,\mathrm{mmol}\,,
$$

kde p_n a T_n jsou tlak a teplota za normálních podmínek.

Při teplotě $T = 120\,^\circ\mathrm{C}$ už bude veškerá voda vypařená. Molární množství vody je

$$
n_{\mathrm{H_2O}} = \frac{m}{M_{\mathrm{H_2O}}} = 833\,\mathrm{mmol}\,.
$$

Molární množství vody je tedy mnohem vyšší, parciální tlak vzduchu tak můžeme zanedbat. Celkový tlak tedy nakonec bude

$$
p = \frac{n_{\mathrm{H_2O}}}{V}RT = 27\,\mathrm{MPa}\,.
$$

To je velmi vysoký tlak. Voda ale při zvýšeném tlaku vaří až při vyšších teplotách. Proto se ani při $120\,^\circ\mathrm{C}$ neodpaří veškerá voda, naopak pouze část. Voda bude působit parciálním tlakem, který je tlakem sytých vodních par při $120\,^\circ\mathrm{C}$, neboť při něm se už žádná další voda neodpaří. Jeho hodnota je přibližně $p_\mathrm{w} = 198{,}9\,\mathrm{kPa}$, lze ji najít na internetu, např. na `https://www.engineeringtoolbox.com/water-vapor-saturation-pressure-d_599.html`.

K tomuto tlaku se musí přičíst ještě parciální tlak vzduchu uvnitř kostky. Objem vzduchu je

$$V_\mathrm{v2} = V - V_\mathrm{w} = V - \frac{m}{\rho_{120\,^\circ\mathrm{C}}} = 84{,}1\,\mathrm{cm}^3 \,.$$

V tomto výpočtu jsme usoudili, že hmotnost vody, která se vypařila a je v kostce ve formě plynu, je zanedbatelná oproti hmotnosti, která je stále v kapalném skupenství. Viděli jsme totiž, že když se odpaří celá voda, je její tlak alespoň o dva řády vyšší než tlak sytých vodních par. Množství odpařené vody tak také bude o dva řády nižší než hmotnost zbytku. Hustotu vody jsme použili $\rho_{120\,^\circ\mathrm{C}} = 943\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ ze zdroje `https://www.engineeringtoolbox.com/water-density-specific-weight-d_595.html`.

Pro parciální tlak vzduchu proto platí

$$p_\mathrm{v} = n_\mathrm{v}\frac{RT}{V_\mathrm{v2}} = p_\mathrm{n}\frac{V_\mathrm{v}}{V_\mathrm{v2}}\frac{T}{T_\mathrm{n}} \doteq 135\,\mathrm{kPa}\,.$$

Celkový tlak v kostce tedy činí

$$p_\mathrm{tot} = p_\mathrm{w} + p_\mathrm{v} = 334\,\mathrm{kPa} \doteq 330\,\mathrm{kPa}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 26 ... Kdy už tam budu? 7 bodů

Jarda se veze ve výtahu, který stoupá stálou rychlostí. Protože už je netrpělivý, háže si svými klíči od pokoje. Vždy je vyhodí do výšky 62 cm*. Mezi jedním výhozů a následným chycením klíčů ale výtah začal rovnoměrně brzdit, takže klíče vylétly do výšky* 72 cm *a strávily ve vzduchu o* 0,15 s *více času. Určete, s jakou velikostí zrychlení výtah zpomaloval.*

Jarda se už ve výtahu těší do postele.

Při brždění výtahu při cestě vzhůru působí setrvačná síla ve výtahu směrem vzhůru, zrychlení klíčů tak bude menší (označíme jej a). Protože je výška, do které klíče vylétly, větší než původní, nastalo brždění při stoupání klíčů.

Při rovnoměrném pohybu výtahu strávily klíče ve vzduchu vždy čas

$$h = \frac{1}{2}g\frac{t^2}{4} \quad \Rightarrow \quad t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}711\,\mathrm{s}\,.$$

Dobu klíčů ve vzduchu při vyhození s bržděním výtahu si rozdělíme na dva – t_1 je čas od výhozu, kdy výtah ještě nebrzdí, a čas t_2 stráví klíče ve vzduchu, kdy na ně působí zrychlení a. Platí tak $T = 2\sqrt{2h/g} + \Delta t = t_1 + t_2 = 0{,}861\,\mathrm{s}$. Ještě vyčíslíme počáteční rychlost $v_0 = \sqrt{2gh} = 3{,}49\,\mathrm{m{\cdot}s}$.

Označme rychlost, kterou klíče měly v okamžiku změny zrychlení, jako v_1. Pak pro ni platí

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}\,,$$

kde h_1 je výška, v jaké se v tomto okamžiku nacházely. Pro čas t_1 pak platí

$$t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g}\,.$$

Čas t_2 je pak složen ze dvou úseků – v prvním klíče ještě letěly nahoru a ve druhém padaly dolů. Můžeme jej zapsat jako

$$t_2 = \frac{v_1}{a} + \sqrt{\frac{2H}{a}}\,.$$

Dosazením do rovnice pro celkový čas dostáváme

$$t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g} + v_1\frac{g-a}{ag} + \sqrt{\frac{2H}{a}} = T\,.$$

Poslední neznámé jsou v_1 a hledané a. Ze zákona zachování energie známe rychlost klíčů v okamžiku změny zrychlení. Ta se pak celá přemění na změnu potenciální energie s novým zrychlením ve výtahu, takže máme vztah

$$v_0^2 = 2gh_1 + 2a\left(H - h_1\right) = 2\left(g-a\right)h_1 + 2aH \quad\Rightarrow\quad \frac{v_0^2 - 2aH}{2\left(g-a\right)} = h_1\,.$$

Odsud dosadíme do vztahu pro v_1, která tak je

$$v_1 = \sqrt{a\frac{2gH - v_0^2}{g-a}}\,.$$

Dosazením do rovnice pro časy tak už dostáváme rovnici, ve které je jako jediná neznámá hledané zrychlení. Máme

$$\sqrt{\frac{g-a}{a}2g\left(H-h\right)} + g\sqrt{\frac{2H}{a}} = gT - v_0\,.$$

Rovnici pro a bychom mohli dále upravovat, ale vyčíslíme hodnotu a numericky. Dostáváme $a = 7{,}74\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Výtah proto zpomaloval se zrychlením $a_\mathrm{v} = g - a \doteq 2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 27 ... zákeřný klakson 5 bodů

Na soustředění účastníci měřili rychlost auta pomocí posunu frekvence klaksonu. Narazili ale na problém – tón klaksonu se mezi jednotlivými opakováními měnil. Lega proto napadla následující modifikace experimentu: změříme frekvenci klaksonu, když se k nám auto blíží, jako $f_1 = 437\,\mathrm{Hz}$. Hned na to frekvenci $f_2 = 415\,\mathrm{Hz}$, jakmile projede auto těsně kolem nás. Jestliže předpokládáme, že rychlost auta ani frekvence, kterou klakson vydává, se mezitím nezměnily, jakou rychlostí auto jelo? *Lega skutečně napadla na soustředění během prezentací.*

Dopplerov posun pre prípad, keď sa zdroj blíži k nám, sa dá vyjadriť vzťahom

$$f_1 = f_0\frac{v_c}{v_c - v}\,,$$

kde f_1 je frekvencia, ktorú nameriame; f_0 je frekvencia, ktorú zdroj (čiže v našom prípade klaksón) vydáva; $v_c = 343\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je rýchlosť zvuku vo vzduchu a v je rýchlosť zdroja (čiže v našom prípade rýchlosť auta).

Keď sa od nás bude zdroj vzďaľovať, iba sa otočí znamienko pri rýchlosti, takže bude platiť

$$f_2 = f_0 \frac{v_c}{v_c + v} \,.$$

Dostávame teda sústavu dvoch rovníc pre neznáme f_0 a v, pričom zadanie sa nás pýta iba na v. Sústavu môžeme vyriešiť napríklad tak, že druhú rovnicu podelíme prvou

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{v_c - v}{v_c + v} \,.$$

Vynásobíme obe strany menovateľom pravej strany, presunieme všetky členy obsahujúce v na jednu stranu, osamostatníme v a dostávame výsledok

$$v = v_c \frac{1 - \frac{f_2}{f_1}}{1 + \frac{f_2}{f_1}} = 31{,}9\,\mathrm{km \cdot h^{-1}} \,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 28 ... nesprávné napětí

5 bodů

V testovacím elektrolyzéru vody nám vzniká $1{,}43\,\mathrm{g}$ vodíku za hodinu. Přístroj napájíme stejnosměrným proudem ze zdroje, jež je připojen kabely, přičemž každý má odpor $3{,}1\,\mathrm{m\Omega}$. Výstupní napětí na zdroji je $1{,}95\,\mathrm{V}$, to ovšem není přímo spojené s elektrolýzou. Jaké napětí bychom naměřili, pokud bychom voltmetr připojili přímo k elektrolyzéru? *Jarda vyrábí vodík.*

Zdroj musí kromě napětí, které je potřebné na samotnou elektrolýzu, dodávat napětí na překonání ohmického odporu v přívodních vodičích. Jestliže měříme napětí přímo na elektrolyzéru pomocí čtyřbodové metody, naměříme menší hodnotu, a to

$$U_\mathrm{e} = U - 2RI \,,$$

kde I je proud, který celým systémem prochází a koeficient 2 musíme započítat kvůli tomu, že jeden kabel jde ze zdroje do přístroje a druhý zpátky. Množství vyloučeného vodíku je podle Faradayova zákona elektrolýzy úměrné procházejícímu proudu jako

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{M_{\mathrm{H}_2}}{N_A} \frac{I}{2e} \,,$$

kde koeficient 2 máme kvůli tomu, že na každou molekulu H_2 připadnou dva elektrony. Molární hmotnost vodíku používáme $2{,}016\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. Po vyjádření I a dosazení do první rovnice dostáváme napětí, pod kterým probíhá samotná elektrolýza, jako

$$U_\mathrm{e} = U - 2R \frac{2eN_A}{M_{\mathrm{H}_2}} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \doteq 1{,}71\,\mathrm{V} \,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 29 ... stříkoun lapavý
6 bodů

Stříkoun lapavý je druh ryby, který si pro obstarávání potravy našel originální způsob lovu kořisti. Přiblíží se k hladině a vyplivne proud vody, kterým sestřelí nicnetušící hmyz sedící v blízkosti. Ten spadne do vody a nemá mnoho času uniknout. Jestliže stříkoun hmyz vidí sedět pod úhlem $35\,^\circ$ *vůči kolmici k hladině, jak nejdále musí od něj hmyz sedět, aby mohl být sestřelen? Uvažujte, že ryba dokáže sestřelit hmyz sedící nejvýše* $3{,}0\,\mathrm{m}$ *nad hladinou.*

Jardu poprskaly rybičky.

Z poslední podmínky dostaneme, že rychlost, jakou stříkoun dokáže vodu ze své tlamy vyplivnout, je

$$v = \sqrt{2gh}\,,$$

kde $h = 3{,}0\,\mathrm{m}$.

Dále musíme použít ochrannou parabolu, jejíž rovnice je pro stříkání z nulové výšky

$$y = -\frac{1}{4h}x^2 + h\,.$$

Tam, kde se tato parabola protne se směrem ke hmyzu, je nejvzdálenější pozice, kde ještě může být potrava zasažena. Musíme proto určit daný směr. Mohlo by se zdát, že je to těch $35\,^\circ$ ze zadání, ale oči stříkouna jsou pod hladinou, je tedy nutné započítat lom světla na vodní hladině. Ze Snellova zákona pro vodu s indexem lomu $n = 1{,}333$ dostáváme

$$\beta = \arcsin(n \sin\alpha) = 50\,^\circ\,.$$

Přímka $y = x \operatorname{cotg}\beta$ se s ochrannou parabolou protne v bodech

$$0 = \frac{1}{4h}x^2 + x\operatorname{cotg}\beta - h \quad\Rightarrow\quad x_{1,2} = 2h\frac{-\cos\beta \pm 1}{\sin\beta}\,,$$

přičemž nás v našem řešení zajímá kladný kořen. Celková vzdálenost od stříkouna tak může být maximálně

$$d = \frac{x_1}{\sin\beta} = 2h\frac{1-\cos\beta}{\sin^2\beta} = 2h\frac{1}{1+\cos\beta} \doteq 3{,}6\,\mathrm{m}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 30 ... kopeme nahoru
6 bodů

Uvnitř duté planety se vyvinula zvláštní forma života. Obyvatelé této vakuové bubliny o poloměru $r = 1\,000\,\mathrm{km}$ *se rozhodli prokopat se nahoru na povrch planety. Jejich vědci změřili hustotu kamene v několika místech a zjistili, že se vzdáleností od středu planety lineárně klesá. Na okraji své bubliny naměřili hustotu* $9\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a o* $100\,\mathrm{km}$ *dál od středu naměřili* $8\,800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*. Díky tomu odhadli, že jejich planeta pravděpodobně nebude mít poloměr větší než* $5\,000\,\mathrm{km}$*.*

Během kopání tunelu se ve vzdálenosti $R = 3\,000\,\mathrm{km}$ *od středu planety rozhodli udělat si pauzu na oběd. Narazili ale na zvláštní komplikaci – gravitaci. Uvnitř jejich bubliny je totiž nulové gravitační zrychlení, byli tedy překvapeni, že je něco táhne zpět dolů. Spočítejte gravitační zrychlení v místě jejich obědové pauzy. Počítejte s tím, že všechna hmota ve vzdálenosti* x *od středu planety má stejnou hustotu.* *Kuba četl Toulavou Zemi.*

Využijeme Newtonovu větu o obalu (*Newton's shell theorem*), která říká, že intenzita gravitačního pole uvnitř kulové plochy je nulová. To je také ten důvod, proč je uvnitř této duté planety nulové gravitační zrychlení. Současně to znamená, že můžeme ignorovat veškerou hmotu, která se nachází nad našimi průzkumníky.

Stačí nám tedy určit, jak na průzkumníky gravitačně působí ta hmota, jež se nachází v kouli pod nimi. Uprostřed této koule se nachází bublina vakua. Zde využijeme druhou část Newtonovy věty o obalu. Ta říká, že kulová plocha působí na vnější objekty gravitačně tak, jako by veškerá její hmota byla soustředěna v jejím středu. Stačí nám tedy určit gravitační působení kulové plochy s poloměrem x a zintegrovat to od r po R.

Víme, že hustota planety ρ je nějaká lineární funkce závislá na x. Má tedy tvar $\rho(x) = ax + b$. Z měření vědců víme, že zaprvé platí $9\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = a \cdot 1\,000 \cdot 10^3\,\mathrm{m} + b$, a zadruhé $8\,800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = a \cdot 1\,100 \cdot 10^3\,\mathrm{m} + b$. Po vyřešení této soustavy rovnic dojdeme k výsledku $a = -2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-4}}$ a $b = 11\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Dostáváme tedy

$$\mathrm{d}g = \frac{G}{R^2}\,\mathrm{d}M = \frac{G}{R^2}\rho(x)\,\mathrm{d}V = \frac{G}{R^2}(ax+b)4\pi x^2\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi G}{R^2}\left(ax^3 + bx^2\right)\mathrm{d}x\,.$$

Tento výsledek zintegrujeme od r po R

$$g = \frac{4\pi G}{R^2}\int_r^R \left(ax^3 + bx^2\right)\mathrm{d}x = \frac{4\pi G}{R^2}\left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3\right]_r^R = \frac{\pi G}{3R^2}\left[3ax^4 + 4bx^3\right]_r^R\,.$$

Po úpravě a dosazení pak získáme

$$g = \frac{\pi G}{3R^2}\left[3a\left(R^4 - r^4\right) + 4b\left(R^3 - r^3\right)\right] \doteq 5{,}15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Jakub Smolík
jakub.smolik@fykos.cz

Úloha 31 ... ozvěnaaaaaaaaaaaa 6 bodů

Uprostřed dlouhého tunelu o poloměru $R = 15\,\mathrm{m}$ stojí bodový zdroj zvuku, který vydá krátké pípnutí. Ve vzdálenosti $D = 210\,\mathrm{m}$ rovněž uprostřed tunelu uslyšíme jeho hladinu intenzity jako $60\,\mathrm{dB}$. Za jak dlouho po prvotním uslyšení pípnutí přestaneme slyšet jeho ozvěnu, jestliže se při každém odrazu od stěny sníží jeho intenzita o $60\,\%$? Hranice slyšitelnosti v tunelu je $22\,\mathrm{dB}$. *Jarda v mládí často býval v jeskyních Moravského krasu.*

Snižování hladiny intenzity zvuku probíhá dvěma způsoby – jednak při odrazu, jednak samotným šířením v prostoru, neboť zdroj zvuku je bodový. Hladinu intenzity zvuku vyjádříme jako

$$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)\,,$$

kde I je intenzita zvuku v daném místě a $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$ je intenzita prahu slyšení.

Bodový zdroj se vyznačuje tím, že můžeme vůči vzdálenosti od něj zanedbat jeho rozměry. Předpokládejme, že z něj vychází nějaký výkon P izotropně do všech směrů. Intenzita ve vzdálenosti r tak je

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}\,.$$

Intenzita tedy nepříliš překvapivě klesá s druhou mocninou vzdálenosti. Ze zadání dokážeme jednoduše dopočítat akustický výkon zdroje a použít ho při dalších výpočtech.

Potřebujeme určit počet odrazů, při kterém ještě budeme hladina intenzity zvuku větší než 20 dB, což odpovídá intenzitě $100I_0$. Zvuk se odráží od stěn, takže putuje větší vzdálenost k bodu, kde jej slyšíme. Protože je situace rotačně symetrická, můžeme uvažovat pouze 2D průřez. Bod, ve kterém posloucháme, si zrcadlově zobrazíme přes stěnu, a to hned několikrát. Každý z těchto bodů si pak spojíme se zdrojem zvuku a změříme vzdálenost. Ta pak pro n-tý zobrazený bod bude

$$r_n = \sqrt{(2nR)^2 + D^2}\,.$$

Také si poznamenáme, kolikrát zvuk projde přes zrcadlovou zeď, to bude reprezentovat počet odrazů. Toto číslo je přímo rovno n. Intenzitu zvuku spočítanou ze vzdálenosti r_n pak přenásobíme faktorem $0{,}4^n$. Výsledky zaznamenáme do tabulky 1.

Tabulka 1: Závislost hladiny intenzity zvuku na počtu odrazů od zdroje.

$\frac{n}{1}$	$\frac{r_n}{\mathrm{m}}$	$\frac{I}{\mathrm{W\cdot m^{-2}}}$	$\frac{L}{\mathrm{dB}}$
0	210	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	60,0
1	212	$3{,}9 \cdot 10^{-7}$	55,9
2	218	$1{,}5 \cdot 10^{-7}$	51,7
3	228	$5{,}4 \cdot 10^{-8}$	47,3
4	242	$1{,}9 \cdot 10^{-8}$	42,9
5	258	$6{,}8 \cdot 10^{-9}$	38,3
6	277	$2{,}4 \cdot 10^{-9}$	33,7
7	297	$8{,}2 \cdot 10^{-10}$	29,1
8	319	$2{,}8 \cdot 10^{-10}$	24,5
9	342	$9{,}9 \cdot 10^{-11}$	19,9

Vidíme, že teprve při devíti odrazech klesla hladina intenzity zvuku pod 22 dB. To odpovídá časovému zpoždění

$$\Delta t = \frac{r_8 - r_0}{c} \doteq 0{,}32\,\mathrm{s}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 32 ... maximální aktivita I

6 bodů

Jindra má $N_0 = 10^7$ atomů izotopu ^{211}Bi. Ten se s poločasem rozpadu $T_{\mathrm{Bi}} = 2{,}14\,\mathrm{min}$ přeměňuje na izotop ^{207}Tl, který se s poločasem rozpadu $T_{\mathrm{Tl}} = 4{,}77\,\mathrm{min}$ přeměňuje na stabilní izotop ^{207}Pb. Jaká je maximální aktivita, které systém dosáhne? *Jindra nepohrdne žádnou aktivitou.*

Mohlo by se zdát, že k odpovězení této otázky musíme vyřešit soustavu diferenciálních rovnic popisující rozpadovou řadu, ale to není pravda. Maximální aktivita bude v systému v čase $t = 0$, což můžeme dokázat i úvahou.

Rozpad radioaktivního izotopu můžeme popsat buď poločasem rozpadu $T_{1/2}$ nebo rozpadovou konstantou λ. Jestliže v čase $t = 0$ bylo v systému N atomů daného izotopu, tak v čase t bude v systému jen

$$N(t) = N \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = N\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{6}$$

atomů onoho izotopu, jelikož část z nich se již rozpadla. Mezi poločasem rozpadu a rozpadovou konstantou platí vztah

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}\,.$$

Aktivita R radioaktivního izotopu (množství rozpadů za sekundu) závisí na množství atomů N v systému a rozpadové konstantě λ

$$R = \lambda N\,.$$

V našem systému se nacházejí dva radioaktivní izotopy ^{211}Bi a ^{207}Tl. Nazvěme okamžitý počet atomů bismutu jako N_{Bi} a okamžitý počet atomů thallia jako N_{Tl}. Aktivita závisí na okamžitém množství atomů obou izotopů jako

$$R = \lambda_{\mathrm{Bi}} N_{\mathrm{Bi}} + \lambda_{\mathrm{Tl}} N_{\mathrm{Tl}}\,, \tag{7}$$

kde λ_{Bi} a λ_{Tl} jsou rozpadové konstanty daných izotopů. Vzhledem k tomu, že $T_{\mathrm{Bi}} < T_{\mathrm{Tl}}$, platí $\lambda_{\mathrm{Bi}} > \lambda_{\mathrm{Tl}}$.

Nyní přijde klíčová část naší úvahy. Díky tomu, že rozpadová konstanta izotopu bismutu je větší než rozpadová konstanta izotopu thallia, při stejném množství atomů obou izotopů bude vzorek bismutu vykazovat vyšší aktivitu. V našem systému začínáme čistě s atomy bismutu v množství N_0. V průběhu času se část z nich rozpadne na izotop thallia. Dále část atomů thallia se rozpadne na stabilní izotop olova ^{207}Pb. Jestliže se rozpadlo M atomů bismutu, pak se v systému nachází $N_{\mathrm{Bi}} = N_0 - M$ atomů bismutu a $N_{\mathrm{Tl}} \leq M$ atomů thallia. Znovu se podívejme na rovnici (7). Část atomů bismutu byla nahrazena atomy thallia. Jak už bylo řečeno, izotop thallia má nižší aktivitu než stejné množství izotopu bismutu. Ale množství atomů bismutu pouze klesá podle rovnice (6) a v systému nikdy nemůže být více atomů thallia, než kolik se rozpadlo atomů bismutu. Proto maximální aktivita v systému nastala v čase $t = 0$ a měla hodnotu

$$R_{\max} = \lambda_{\mathrm{Bi}} N_0 = 5{,}40 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Maximální aktivita v našem systému měla hodnotu 54,0 kBq.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 33 ... ponořovací

5 bodů

Máme k dispozici zanedbatelně tenkou dutou kouli a dutou krychli, obě o objemu $V = 5\,\mathrm{l}$ a plné vzduchu. Jaký je poměr prací, které potřebujeme k jejich ponoření pod vodu? Podstava krychle je rovnoběžná s hladinou (během pohybu ji neotáčíme), obě tělesa začínají na hladině a chceme je dostat do stavu, kdy jsou úplně ponořená a dotýkají se hladiny. Jako výsledek odevzdejte číslo větší než 1.

Matěj umýval věci ve vaně.

Řešení přes síly

Pro výpočet práce budeme muset překonat vztlakovou sílu – tíhová síla bude v tomto případě zanedbatelná a kompenzovaná vztlakovou silou vzduchu (vzhledem k $V \gg 0$). Její velikost je vždy úměrná objemu V ponořené části tělesa podle Archimédova zákona jako $F = V\rho_\mathrm{v} g$, kde ρ_v je hustota vody a g tíhové zrychlení.

Práci potřebnou pro ponoření krychle vypočítáme přímočaře jako

$$W_\square = \int_0^a F\,\mathrm{d}h = \int_0^{\sqrt[3]{V}} g\rho_\mathrm{v}\sqrt[3]{V}^2 h\,\mathrm{d}h = \frac{1}{2} g\rho_\mathrm{v}\sqrt[3]{V}^4 \,.$$

U koule je situace o něco složitější – ponořená část je kulový vrchlík, jeho objem určíme dle známého vztahu

$$V_\mathrm{v} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)\,,$$

kde h je výška vrchlíku a $r = \sqrt[3]{3V/(4\pi)}$ poloměr koule. Můžeme potom psát

$$W_\bigcirc = \int_0^{2r} F\,\mathrm{d}h = \int_0^{2r} g\rho_\mathrm{v}\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)\,\mathrm{d}h = g\rho_\mathrm{v}\frac{4\pi}{3}r^4 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} g\rho_\mathrm{v}\sqrt[3]{V}^4 \,.$$

Práce pro ponoření koule je tedy zřejmě větší a hledaný poměr získáme jako

$$\frac{W_\bigcirc}{W_\square} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \doteq 1{,}24\,.$$

Řešení bez sil a bez integrálů

Pre zjednodušenie zanedbáme tiaž vzduchu, ale časom sa k tomuto zanedbaniu ešte vrátime. S týmto predpokladom je práca vykonaná pri ponáraní spotrebovaná iba na nárast potenciálnej energie vody. Čiže naša otázka sa mení na to, aký je pomer medzi nárastom potenciálnej energii vody, keď ponárame guľu oproti tomu, keď ponárame kocku.

Zadanie nehovorí o tom, akú plochu má hladina, budeme teda pre jednoduchosť predpokladať, že je nekonečne veľká. V takom prípade ponorením objektu pod hladinu presunieme vodu, ktorá sa predtým nachádzala na jeho mieste, na hladinu. Zmena potenciálnej energie je $\Delta E_p = mg\Delta h$, kde g je tiažová konštanta a $m = V\rho$ je hmotnosť premiestnenej vody, ktorá je pre kocku aj guľu rovnaká, čiže pomer vykonaných práci bude rovný pomeru Δh.

Δh je rovné zmene výšky ťažiska presunutej vody. Ako sme už povedali, voda je dvíhaná na vodnú hladinu, čiže nová poloha ťažiska bude na hladine. Nakoľko voda je homogénna a guľa aj kocka sú pekné symetrické objekty, môžeme povedať, že pôvodné ťažiská sa nachádzali tam, kde sú po ponorení stredy ponorených objektov. Čiže pre guľu r pod hladinou a pre kocku $a/2$ pod hladinou. Všetky tieto úvahy môžeme symbolicky prepísať ako

$$\frac{W_\bigcirc}{W_\square} = \frac{\Delta E_{p\bigcirc}}{\Delta E_{p\square}} = \frac{mg\Delta h_\bigcirc}{mg\Delta h_\square} = \frac{r}{a/2}\,,$$

kde $r = \sqrt[3]{3V/(4\pi)}$ je polomer gule a $a = \sqrt[3]{V}$ je strana kocky. Dosadením dostávame výsledok

$$\frac{W_\bigcirc}{W_\square} = \frac{\sqrt[3]{3V/(4\pi)}}{\sqrt[3]{V}/2} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \doteq 1{,}24\,.$$

Na záver si ešte môžeme uvedomiť, že poklesy potenciálnej energie vzduchu budú v rovnakom pomere, čiže v skutočnosti zanedbanie vzduchu vôbec výsledný pomer neovplyvní.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha 34 ... žába na leknínu 6 bodů

Jarda tráví na zahrádce tolik času, že se rád seznamuje s jejími obyvateli. Žába sedávající na leknínu v zahradním jezírku se však vždycky lekne a skočí pryč. Jestliže má list leknínu hmotnost 43 g *a žába hmotnost* 150 g*, jak nejdál může doskočit, pokud na pevné zemi skočí až do vzdálenosti* 2,1 m*? Předpokládejte, že se leknín neprohýbá a pohybuje se pouze v horizontálním směru, a to volně.*

Jardu doma budí žabí kvákání.

Uvažujme, že taková žába je vysoce inteligentní a skáče ze země pod takovým úhlem, aby doskočila co nejdále. Je známým faktem, že tento úhel je 45° a že maximální vzdálenost, kterou předmět vyslaný rychlostí v_0 ze země urazí, je

$$L = \frac{v_0^2}{g}\,,$$

odkud můžeme najít rychlost žáby těsně po výskoku jako $v_0 = \sqrt{gL}$.

Touto rychlostí se tedy žába dokáže odrazit od podložky, na které sedí. Když se ovšem odráží od leknínu, ze zákona zachování hybnosti je její rychlost vůči zemi menší. Nechť je ve vztažné soustavě s leknínem počáteční vodorovná rychlost žáby $v_0 \cos\alpha$, přičemž α je úhel, pod kterým se žába odráží. Pak má zákon zachování hybnosti tvar

$$Mv_\mathrm{h} = mv_\mathrm{l}\,,$$

kde v_h je vodorovná rychlost žáby, M její hmotnost a v_l je rychlost leknínu a m jeho hmotnost. Ve vztažné soustavě leknínu je rychlost žáby $v_0\cos\alpha = v_\mathrm{l} + v_\mathrm{h}$, odkud

$$v_\mathrm{h} = \frac{v_0\cos\alpha}{1+\frac{M}{m}}\,.$$

Touto rychlostí se tedy žába pohybuje ve vodorovném směru vůči hladině vody (vůči zemi). Žába stráví ve vzduchu čas

$$t = 2\frac{v_0\sin\alpha}{g}\,,$$

takže dokáže doletět do vzdálenosti

$$l = v_\mathrm{h}t = \frac{v_0^2 2\cos\alpha\sin\alpha}{g\left(1+\frac{M}{m}\right)}\,.$$

Dospěli jsme k zajímavému výsledku. Nejvhodnější úhel, pod kterým se má žába odrazit vůči leknínu v jeho klidové soustavě, je opět 45°. Maximální vzdáleností, kterou žába může doskočit, je

$$l = \frac{v_0^2}{g\left(1+\frac{M}{m}\right)} = \frac{L}{1+\frac{M}{m}} \doteq 0{,}47\,\mathrm{m}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 35 ... relativistická hvězda

6 bodů

Jaký poloměr by musela mít hvězda, která by měla hmotnost stejnou jako Slunce, ale přitom by docházelo k rudému posuvu tak velkému, že by se vlnová délka záření vycházejícího z jejího povrchu prodloužila na dvojnásobnou pro pozorovatele v nekonečnu? Pro jednoduchost uvažujte nerotující sféricky symetrickou hvězdu.

Karel přemýšlel nad neutronovými hvězdami a černými dírami.

Jev, který zde budeme pozorovat, je gravitační rudý posun. Ten lze pro sféricky symetrické gravitační pole popsat vztahem

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} = \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{R}\right)^{-1/2} ,$$

kde λ_∞/λ_0 je poměr vlnových délek záření v nekonečnu a u zdroje (v našem případě rovný 2), R je hledaný poloměr hvězdy a r_S značí její Schwarzschildův poloměr – ten určíme jako

$$r_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2} ,$$

kde M je hmotnost hvězdy a G gravitační konstanta. Dosazením a úpravou vztahu dostaneme

$$R = \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0}\right)^{-2}} \frac{2GM}{c^2} = \frac{4}{3} r_\mathrm{S} \doteq 3\,938\,\mathrm{m} .$$

Matematicky vidíme, že se ještě nebude jednat o černou díru, nemá k tomu ale daleko a taková hvězda by na černou díru pravděpodobně zkolabovala. Typické neutronové hvězdy o hmotnosti blízké hmotnosti Slunce mohou mít poloměr v řádech 10 km.

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Úloha 36 ... kulečník

6 bodů

Pták Fykosák je u kulečníkového stolu, který má rozměry 3,5 na 7 stop a v každém z rohů je díra na koule. Na stole byla bílá a zelená koule, které jsou jinak naprosto stejné, vejdou se tak akorát do děr a dokonale pružně se odráží od stěn i od sebe. Pták Fykosák původně položil zelenou na delší osu symetrie stolu. Do bílé šťouchnul směrem k zelené. Zelená po nárazu doputovala do jedné z rohových děr. Bílá však po několika nárazech od delších hran stolu nakonec skončila v té stejné díře. Kolik na stole existuje pozic pro umístění zelené koule, aby se tato situace mohla odehrát? Zanedbejte rotaci koulí.

Jarda nejčastěji trefí do díry bílou.

Nejprve si ukážeme, že se koule při pružném nárazu rozletí do pravého úhlu. Označme počáteční vektor rychlosti jedné z koulí jako $\mathbf{v}_0$, její vektor rychlosti po srážce jako $\mathbf{v}$ a vektor rychlosti druhé koule jako $\mathbf{u}$. Pak platí zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie ve tvaru

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \qquad v_0^2 = v^2 + u^2 .$$

Umocněním první rovnice na druhou dostaneme

$$v_0^2 = v^2 + u^2 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} ,$$

což při porovnání se zákonem zachování energie dává podmínku $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 0$, čili že opravdu jsou vektory rychlostí po srážce navzájem kolmé a koule se pohybují po kolmých trajektoriích.

Stůl je symetrický podle dvou os. Na začátku si zvolíme jednu díru, do které budeme koule trefovat. Protože zelenou kouli umisťujeme na jednu z os symetrie, budou dvě ze čtyř řešení pro čtyři díry stejná. Naopak budou kvůli symetrii jiná řešení pro dvě díry, z nichž každá bude na jedné straně stolu podle delší hrany. Nalezený počet řešení pro jednu kouli tak na konci budeme muset vynásobit dvěma.

Při pružném nárazu do zdi se zachová tečná složka rychlosti koule, protože síla ode zdi působí pouze kolmo. Tato síla změní kolmou složku rychlosti na opačnou, jelikož se zachovává energie koule. Můžeme si proto stěnu představit jako zrcadlo a trajektorii koule jako paprsek. Ten můžeme protáhnout za stěnu a zrcadlově zobrazit díry ve stole i na druhé straně stěny. Toto můžeme udělat několikrát po sobě, zobrazíme si za první stěnu i další takové odrazy na téže a protější stěně.

Podle předchozího odstavce jsme si tedy pomocí zrcadlových odrazů zobrazili díru, do které mají spadnout obě koule (viz obrázek). Trajektorie koulí po srážce tvoří pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami, které z původního místa vedou do reálné a zobrazené díry. Bod, ve kterém dojde ke srážce, tak leží na Thaletových kružnicích, které mají středy vždy ve vzdálenosti

$$d_n = \frac{2ns}{2}$$

od trefované díry podél reálné kratší stěny kulečníku, přičemž $s = 3{,}5\,\mathrm{stop}$ je délka kratší strany stolu. Poloměr kružnic je pak také d_n. Vzdálenost bodu, ve kterém dojde ke srážce, od této stěny, je pak

$$y_n = \sqrt{d_n^2 - \left(d_n - \frac{s}{2}\right)^2} = s\,\sqrt{n - \frac{1}{4}}\,.$$

Protože poměr delší strany $l = 7\,\mathrm{stop}$ a kratší s je dva, všechny možné hodnoty y_n musí být menší než $2s$, což odpovídá

$$\sqrt{n - \frac{1}{4}} < 2\,,$$

přičemž zjistíme, že nejvyšším indexem, který toto splňuje, je $n = 4$. Pro jednu díru existují pouze čtyři takové pozice, které mají vlastnosti uvedené v zadání. Jak jsme komentovali výše, musíme tento výsledek vynásobit dvěma za všechny zbylé díry, přičemž jsme rychle ověřili, že žádná pozice neleží ve středu stolu. Správnou odpovědí na zadání je tedy číslo 8.

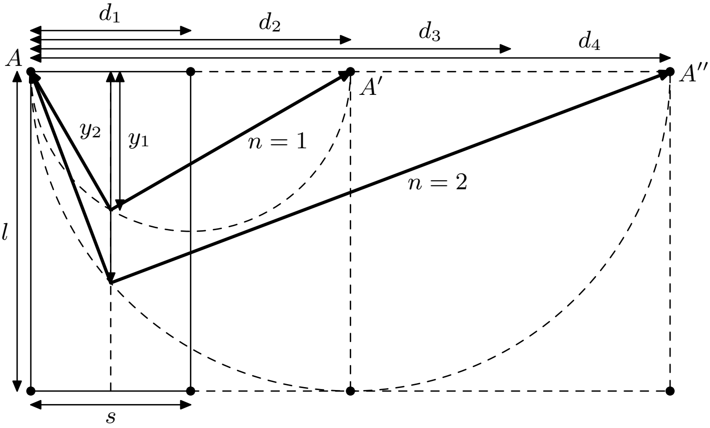
Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 37 ... impedanční spektroskopie — 7 bodů

V elektrochemických experimentech se často setkáváme s metodou, kdy do zařízení posíláme střídavý signál, měníme jeho frekvenci a sledujeme vývoj impedance. Uvažujme náhradní zapojení takového obvodu jako paralelní spojení kondenzátoru s kapacitou C a rezistoru s R_2, které jsou do série zapojené s R_1. Určete největší dosažitelný fázový posun, o který je napětí opožděno za proudem, pokud platí $4R_1 = R_2$. *Jarda zkoumal data ze své bakalářky o elektrolyzérech.*

Impedance jednotlivých prvků je R_1, R_2 a $-i/\left(C\omega\right)$. Celkovou impedanci proto můžeme napsat jako

$$Z = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + iC\omega\right)^{-1} = R_1 + \frac{R_2}{1 + iR_2C\omega} = R_1 + \frac{R_2}{1 + R_2^2C^2\omega^2} - i\frac{R_2^2C\omega}{1 + R_2^2C^2\omega^2}\,.$$



Obrázek 5: Zrcadlové zobrazení vybrané díry a situace pro $n = 1$ a $n = 2$.

Pokud zobrazíme v grafu, kde na svislou osu zobrazíme imaginární složku a na vodorovnou reálnou složku impedance v závislosti na frekvenci, zjistíme, že všechny body leží na půlkružnici se středem v bodě $R_1 + R_2/2$ a poloměrem $R_2/2$. Celá půlkružnice leží pod reálnou osou. Opravdu, označíme-li $\sin\psi = 2R_2C\omega/\left(1 + R_2^2C^2\omega^2\right)$, tak dostáváme

$$\begin{aligned}
Z &= R_1 + \frac{R_2}{2} + \frac{R_2}{2}\exp(-i\psi) = R_1 + \frac{R_2}{2} + \frac{R_2}{2}\left(\cos(\psi) - i\sin(\psi)\right) = \\
&= R_1 + \frac{R_2}{2} + \frac{R_2}{2}\left(\frac{1 - R_2^2C^2\omega^2}{1 + R_2^2C^2\omega^2} - i\frac{2R_2C\omega}{1 + R_2^2C^2\omega^2}\right) = \\
&= R_1 + \frac{R_2}{2}\left(\frac{1 - R_2^2C^2\omega^2}{1 + R_2^2C^2\omega^2} + 1\right) - i\frac{R_2^2C\omega}{1 + R_2^2C^2\omega^2} = R_1 + \frac{R_2}{1 + R_2^2C^2\omega^2} - i\frac{R_2^2C\omega}{1 + R_2^2C^2\omega^2}\,.
\end{aligned}$$

Největšího fázového posuvu dosáhneme, pokud je největší absolutní hodnota poměru imaginární a reálné složky. Uvažujme přímku v grafu imaginární a reálné složky, kterou postupně odklápíme od svislé osy proti směru hodinových ručiček. Tím zmenšujeme absolutní hodnotu poměru imaginární a reálné složky. V jeden okamžik se tato přímka protne s půlkružnicí, která zobrazuje všechny možné impedance v závislosti na frekvenci. V tomto bodě je tedy největší absolutní hodnota fázového posunu. Zároveň zde platí, že tato přímka je nyní tečnou ke kružnici. Dostáváme tak pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona je $R_1 + R_2/2$ a jedna z jeho odvěsen je $R_2/2$. Fázový posun mezi napětím a proudem tedy nakonec je

$$\varphi = -\arcsin\left(\frac{\frac{R_2}{2}}{R_1 + \frac{R_2}{2}}\right) = -\arcsin\left(\frac{R_2}{2R_1 + R_2}\right) = -\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \doteq -41{,}8\,^\circ\,.$$

Znaménko mínus reprezentuje to, že napětí je opožděno za proudem, odpovědí je tedy absolutní hodnota výsledku.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 38 ... malá dírka ve vodním balóně 7 bodů

Máme dutou kouli s tenkými stěnami o poloměru $R = 10{,}5\,\mathrm{cm}$. Tato koule leží na vodorovné rovině (respektive je k ní ve svém nejnižším bodě připevněná), je zcela naplněna vodou a v nejvyšším bodě má díru. Kde musíme vyvrtat další díru, aby z ní voda vystříkla do největší možné vzdálenosti od bodu dotyku koule s rovinou? Díru tvoříme limitně malou. Výsledek zadejte jako úhel, který svírá spojnice této díry a středu koule se svislým směrem (tj. vektor kolmý na rovinu a směřující od ní svírá úhel 0). *Legovi přišlo, že pěkná úloha na hydro...*

Na to aby sme získali rýchlosť, ktorou bude voda z dierky striekať, by sme mohli použiť Bernoulliho zákon, no my použijeme jednoducho úvahy zo zákona zachovania energie (z ktorých je samotný Bernoulli odvodený). Keď bude voda striekať, bude hladina vody klesať. Kinetickú energiu striekajúca voda získava teda na úkor poklesu potenciálnej energie vody. Môžeme si predstaviť, že namiesto toho, aby z novo vytvorenej diery striekala voda, čo sa tam práve nachádza, tak sa tam vždy teleportuje element vody hmotnosti m z vrchu gule a ten aj odletí. Túto úvahu môžeme spraviť, pretože vo všetkých ostatných miestach nádoby sa s vodou nič nedeje (čo je zas dôsledok toho, že uvažujeme dierku limitne malú; ak by nebola zanedbateľná, vznikali by v nádobe prúdy s nezanedbateľnou kinetickou energiou). Tiež sme nenápadne využili fakt, že vďaka diere vo vrchnom bode nádoby je tlak vzduchu na hladine a v novej dierke rovnaký. Element striekajúcej vody tak bude mať kinetickú energiu zodpovedajúcu poklesu potenciálnej energie pre rozdiel výšok hladiny a novej dierky. Keď si tento rozdiel označíme h, tak potom platí

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}\,.$$

Máme teda veľkosť rýchlosti s ktorou voda strieka. Ešte potrebujeme smer. Ten bude kolmý na stenu v danom bode. To je spôsobené tým, že sila je tlak krát plocha, pričom tlak (v tekutinách) je skalárna veličina, takže smer sily je daný čisto „smerom plochy". Sila tlačiaca vodu čo sa nachádza v diere ju tak tlačí kolmo na plochu diery.

Označme si uhol medzi spojnicou diery so stredom gule a zvislým smerom ako φ. Potom vodorovná zložka počiatočnej rýchlosti bude $v_{0x} = v_0 \sin\varphi$ a zvislá zložka bude $v_{0y} = v_0 \cos\varphi$.

Polohu diery vzhľadom na bod, kde sa guľa dotýka roviny na ktorej leží si môžeme vyjadriť pomocou uhlu φ ako $x_0 = R\sin\varphi$ a $y_0 = R(1 + \cos\varphi)$. Horný bod gule je samozrejme vo výške $2R$, čiže výškový rozdiel medzi dierou a vrchom gule h si môžeme vyjadriť ako $h = R(1 - \cos\varphi)$.

Vo zvislom smere sa teda výška nad rovinou bude vyvíjať ako

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Položením $y(t_\mathrm{d}) = 0$ dostaneme čas, za aký voda dopadne. Všeobecne platí

$$t_\mathrm{d} = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g}\,,$$

kde nás zaujíma iba kladný koreň. Za počiatočnú rýchlosť a polohu zatiaľ nedosádzame, aj keď by sme mohli (záleží na preferencii).

Rýchlosť vo vodorovnom smere sa nemení, takže vzdialenosť od bodu kde sa guľa dotýka roviny do bodu kam voda dopadne, bude súčin vodorovnej zložky rýchlosti v_{0x} a času do dopadu t_d, plus počiatočná vodorovná vzdialenosť x_0. Spolu teda dostávame

$$x_\mathrm{d} = v_{0x} t_\mathrm{d} + x_0 = v_{0x} \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g} + x_0 \,.$$

Dosadíme za počiatočné polohy a časy

$$x_\mathrm{d} = \sqrt{2gh} \sin\varphi \frac{\sqrt{2gh}\cos\varphi + \sqrt{2gh\cos^2\varphi + 2gR(1+\cos\varphi)}}{g} + R\sin\varphi \,.$$

Vidíme, že g sa kompletne vykráti. Dosadíme ešte za h a dostávame vzťah závislý len na φ

$$x_\mathrm{d} = \sqrt{2R(1-\cos\varphi)}\sin\varphi\left(\sqrt{2R(1-\cos\varphi)}\cos\varphi + \sqrt{2R(1-\cos\varphi)\cos^2\varphi + 2R(1+\cos\varphi)}\right) + R\sin\varphi \,.$$

Môžeme vyňať R a dostaneme

$$x_\mathrm{d} = R\left(2\sqrt{1-\cos\varphi}\sin\varphi\left(\sqrt{1-\cos\varphi}\cos\varphi + \sqrt{(1-\cos\varphi)\cos^2\varphi + 1 + \cos\varphi}\right) + \sin\varphi\right) \,.$$

kde R je zadaná konštanta, čiže potrebujeme nájsť φ, ktoré maximalizuje tú zátvorku. Nájsť maximum takéhoto výrazu analyticky je v lepšom prípade brutálne ťažké, ale pravdepodobne úplne nemožné. My si teda len vykreslíme zátvorku v grafe 6.

Z grafu vidíme, že zátvorka nadobúda maximum pre $\varphi = 1{,}34\,\mathrm{rad}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 39 ... mění se nám hvězda

6 bodů

Uvažujme, že hvězda podobná našemu Slunci nejvíce energie vyzařovala na vlnové délce $504{,}7\,\mathrm{nm}$ *a měla poloměr odpovídající* $0{,}990 R_\odot$*, kde* $R_\odot$ *je poloměr dnešního Slunce. V průběhu času došlo ke změně jejího složení, což vedlo ke zvětšení poloměru na* $R_\odot$ *a také k posuvu vlnové délky maximálního vyzařování o* $3{,}7\,\mathrm{nm}$ *směrem k ultrafialové oblasti spektra. O kolik procent se zvýšil za tuto dobu zářivý výkon této hvězdy?*

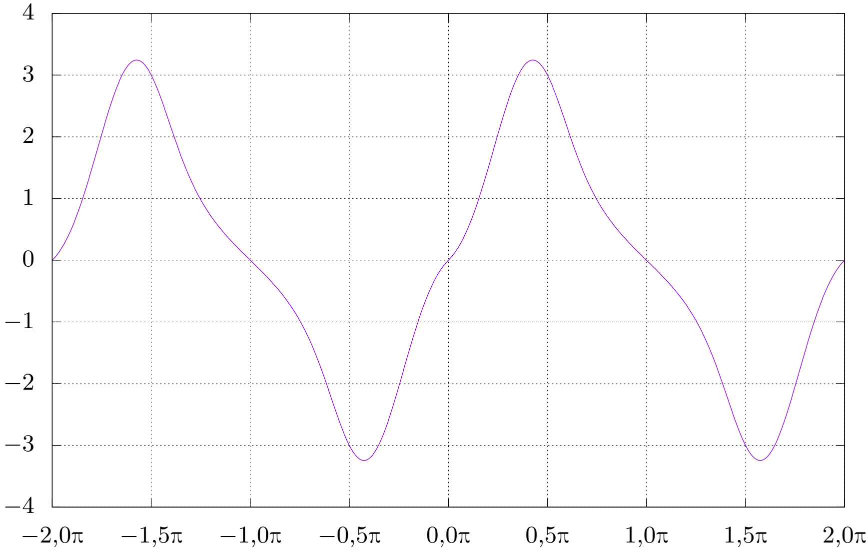
Karel se zamýšlel nad historií a budoucností Slunce.

Pro zářivý výkon černého tělesa platí

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \,,$$

kde σ je Stefan-Boltzmannova konstanta. Na začátku má hvězda poloměr R_0 a teplotu T_0. Po popsané změně se její poloměr změní na $R_1 = R_\odot$ a teplota na T. Tuto teplotu spočítáme ze změny maxima vlnové délky. Z Wienova posunovacího zákona máme

$$T_0 = \frac{b}{\lambda_0} \,, \qquad T = \frac{b}{\lambda_0 - \Delta\lambda} \,,$$



Obrázek 6: Vzdialenosť, do ktorej dostriekne voda x_d normovaná na polomer gule R v závislosti od uhlu diery φ.

kde $b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}$ je *Wienova konstanta* a $\Delta\lambda = 3{,}7\,\mathrm{nm}$ má záporné znaménko, protože jde o posun ke kratším vlnovým délkám. Pak pro teplotu máme

$$T = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \Delta\lambda} T_0\,.$$

Poměr zářivých výkonů je pak roven

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{R_1^2}{R_0^2} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \Delta\lambda}\right)^4\,.$$

Nás zajímá, o kolik procent se zářivý výkon změnil, tedy číslo $L_1/L_0 - 1$ vyjádřené v procentech. Máme

$$\frac{L_1}{L_0} - 1 = \frac{1}{0{,}99^2} \cdot \left(\frac{504{,}7\,\mathrm{nm}}{504{,}7\,\mathrm{nm} - 3{,}7\,\mathrm{nm}}\right)^4 - 1 = 0{,}0508\,,$$

což je 5,08 %.

Jiří Kohl
`jiri.kohl@fykos.cz`

Úloha 40 ... top strop

6 bodů

Žáci si během jedné z nudných hodin ve škole vymysleli svoji vlastní zábavu - házeli malým těžkým předmětem kolmo vzhůru tak, aby se přiblížil co nejblíže ke stropu, ale zároveň se ho *nedotknul. Strop se nachází ve výšce $H = 2{,}7\,\mathrm{m}$ od místa výhozu. Když však tuto zábavu prováděli v hodině fyziky, donutil je učitel změřit počáteční rychlost a její směrodatnou odchylku jako $(7{,}0 \pm 0{,}5)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. S jakou pravděpodobností žáci trefí strop, jestliže je rozdělení počátečních rychlostí gaussovské?* *Jarda poslouchal historky od Vaška.*

Rychlost potřebná k zasažení stropu je

$$u = \sqrt{2gH} = 7{,}28\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Označme $v_0 = 7{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ střední hodnotu rychlosti výhozu a $\Delta v = 0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ směrodatnou odchylku předchozí veličiny. Pak má Gaussova křivka pro dané hodnoty tvar

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta v} \exp\left(-\frac{(v - v_0)^2}{2\,(\Delta v)^2}\right)\,.$$

Pravděpodobnost, že rychlost výhozu je vyšší než v, najdeme integrováním Gaussovy křivky v mezích právě od u do ∞ jako

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta v} \int_u^\infty \exp\left(-\frac{(v - v_0)^2}{2\,(\Delta v)^2}\right) \mathrm{d}v = 28{,}8\,\% \doteq 29\,\%\,,$$

přičemž integrál jsme museli počítat numericky, např. pomocí WolframAlpha.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 41 ... rozdíl tlaků

6 bodů

Jindra má pevnou válcovou trubici o délce $H = 50{,}0\,\mathrm{cm}$ a poloměru $r = 4{,}00\,\mathrm{cm}$. Jeden její konec vzduchotěsně uzavřel víkem. Pak trubici chytl za víko a otevřeným koncem ji začal kolmo ponořovat pod mořskou hladinu. Jaký bude nejvyšší rozdíl mezi tlaky působícími na vrchní víko trubice zespodu a svrchu v průběhu ponořování? Jindra ponořil trubici až do hloubky, kolik mu dovolila délka jeho paže $l = 65{,}0\,\mathrm{cm}$. Hustota vody je $\rho = 1\,024\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Vzduch u hladiny moře je za normálních podmínek. Mořská voda i vzduch mají stejnou teplotu.

Jindra nevěděl, čím jiným by se na dovolené u moře zabavil.

Označme hloubku spodního okraje trubice jako d. Voda uvnitř trubice vystoupá nad spodní okraj a stlačí vzduch uvnitř. Označme výšku hladiny tohoto vodního sloupce nad spodkem trubice jako h. Rovnováha nastane ve chvíli, kdy tlak vody $p_\mathrm{a} + \rho g(d - h)$ se vyrovná s tlakem stlačeného vzduchu uvnitř válce. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ a atmosférický tlak je $p_\mathrm{a} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$ (viz konstantovník). Díky pomalému ponořování trubice pod hladinu probíhá stlačování vzduchu izotermicky. Vzduch uvnitř má stejnou teplotu jako atmosféra a moře.

Dokud je víko trubice nad hladinou, na jeho vrchní stranu působí atmosférický tlak p_a. Na jeho spodní stranu tlačí vzduch uvnitř trubice stlačený pod tlakem $p_\mathrm{a} + \rho g(d - h)$. Rozdíl tlaků působících na víko je $\rho g(d - h)$.

Veličina $d - h$ je hloubka vodní hladiny v trubici pod hladinou moře. Když ponoříme trubici hlouběji, tedy zvětšíme d, zvýší se i výška vodního sloupce v trubici h, avšak méně než se zvýšilo d. Kdyby hladina sloupce zůstala ve stejné hloubce $d - h$ pod hladinou moře jako předtím, tlak vody by zůstal stejný, ale objem vzduchu by byl menší – vzduch by tlačil vodní hladinu sloupce dolů. Kdyby se výška vodního sloupce h při ponoření nezměnila, vzduch by měl stejný tlak jako předtím, ale hloubka hladiny sloupce $d-h$ by byla vyšší než předtím – lak vody by stlačil vzduch v trubici.

Hloubka $d-h$ tudíž během zanořování trubice pod hladinu neustále roste. Tím pádem i rozdíl tlaků $\rho g(d-h)$ stoupá, dokud se víko neponoří na úroveň hladiny moře.

Jakmile se víko ponoří pod hladinu moře, změní se tlak působící svrchu. Nyní na víko svrchu působí tlak vodního sloupce nad víkem a atmosféry $p_\mathrm{a}+\rho g(d-H)$. Zespodu působí tlak stlačeného vzduchu $p_\mathrm{a}+\rho g(d-h)$. Rozdíl tlaků je $\rho g(H-h)$. S tím, jak ponořujeme trubici hlouběji, vzduch je stlačován pod stále vyšším tlakem vody. Výška vodního sloupce uvnitř h se zvyšuje, tudíž rozdíl tlaků na víku $\rho g(H-h)$ klesá.

Maximum rozdílu tlaků tudíž nastane v okamžiku, kdy je víko trubice zarovnáno s mořskou hladinou. Pro izotermické stlačování vzduchu uvnitř trubice platí vztah

$$p_1V_1=p_2V_2\,,$$

kde p_1,p_2 jsou počáteční a koncový tlak a V_1,V_2 jsou počáteční a koncový objem plynu. Počáteční tlak vzduchu v trubici před zanořením je $p_1=p_\mathrm{a}$ a počáteční objem je $V_1=\pi r^2H$. Koncový objem vzduchu je $V_2=\pi r^2(H-h)$ a koncový tlak je

$$p_2=\frac{V_1}{V_2}p_1=\frac{\pi r^2H}{\pi r^2(H-h)}p_\mathrm{a}=\frac{H}{H-h}p_\mathrm{a}\,.$$

Tlak vody v trubici ve chvíli, kdy se víko nachází na úrovni hladiny moře $d=H$, je

$$p_2=\rho g(H-h)+p_\mathrm{a}\,.$$

Tyto dva tlaky se musí rovnat, takže dostaneme rovnici pro h

$$\frac{H}{H-h}p_\mathrm{a}=\rho g(H-h)+p_\mathrm{a}\qquad\Rightarrow\qquad h^2-\left(\frac{p_\mathrm{a}}{\rho g}+2H\right)h+H^2=0\,,$$

a tedy

$$h_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\frac{p_\mathrm{a}}{\rho g}+2H\pm\sqrt{\left(\frac{p_\mathrm{a}}{\rho g}+2H\right)^2-4H^2}\right]=\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}+H\pm\sqrt{\left(\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}\right)^2+\frac{p_\mathrm{a}H}{\rho g}}\,.$$

Výška vodního sloupce h musí být nižší než výška trubice H, tudíž nás zajímá jen kořen kvadratické rovnice se znaménkem minus

$$h=\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}+H-\sqrt{\left(\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}\right)^2+\frac{p_\mathrm{a}H}{\rho g}}\,.$$

To dosadíme do vztahu pro rozdíl tlaků působících na víko

$$\Delta p=\rho g(d-h)=\rho g(H-h)=\rho g\sqrt{\left(\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}\right)^2+\frac{p_\mathrm{a}H}{\rho g}}-\frac{p_\mathrm{a}}{2}\,,$$

což po dosazení čísel ze zadání dá nejvyšší rozdíl tlaků $\Delta p=4{,}80\,\mathrm{kPa}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha 42 ... ohňostroj

6 bodů

Po skončení soutěže si organizátoři FYKOSu naplánovali ohňostroj. Svou rachejtli vypustí rychlostí $45\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *kolmo vzhůru, ta se za čas* $3{,}3\,\mathrm{s}$ *rozpadne na velmi mnoho malých kousků. Ty z místa rozpadu odletí do všech směrů rychlostí* $15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *vůči vztažné soustavě původní rachejtle a září ještě po dobu* $5{,}5\,\mathrm{s}$*. Určete objem prostoru, do kterého se úlomky stihly rozprostřít v okamžiku, kdy zhasnou.*

Jarda si k ohňostroji i rád ťukne.

Rychlost vztažné soustavy rachejtle v okamžiku rozpadu je $u = v_0 - gT = 12{,}63\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ směrem přímo vzhůru, přičemž $T = 3{,}3\,\mathrm{s}$ je čas doby rozpadu rachejtle od vypuštění a $v_0 = 45\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ je počáteční rychlost. Úloha je rotačně symetrická, proto uvažujme řez pouze jednou rovinou, ve které zavedeme souřadnice y směrem vzhůru a x do jedné ze stran tak, že k výbuchu došlo právě na ose $x = 0$. Dále budeme vyšetřovat jednotlivé úlomky, na které se rachejtle rozpadne. Označme α úhel úlomku vůči zemi, $v = 15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ rychlost úlomku po rozpadu rachejtle, $\tau = 5{,}5\,\mathrm{s}$ čas jejich záření. Úlomek se pak pohybuje ve vodorovném směru rychlostí $v_x = v\cos\alpha$, zatímco ve svislém směru se jeho rychlost mění vlivem tíhového zrychlení jako $v_y = u + v\sin\alpha - gt$, kde t je čas od rozpadu rachejtle. Integrováním obou rychlostí podle času získáme závislost polohy na čase jako

$$x = v\cos\alpha t,\; y = H + ut + v\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

přičemž jsme zavedli $H = v_0T - 1/2\cdot gT^2 = 95{,}1\,\mathrm{m}$ jako výšku rozpadu původní rachejtle.

Můžeme si všimnout, že tyto souřadnice tvoří v závislosti na úhlu α kružnici se středem v bodě $H + ut - 1/2\cdot gt^2$ a poloměrem vt. Nyní musíme zjistit, jestli jsou při zhasnutí všechny úlomky stále ve vzduchu, nebo jestli už některé stihly dopadnout na zem. Dosazením τ do rovnice pro y-ovou souřadnici a položením $y = 0$ dostaneme podmínku

$$0 = H + u\tau + v\sin\alpha_\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha_\mathrm{d} = \frac{\frac{1}{2}g\tau^2 - H - u\tau}{v\tau} = 0{,}196\,.$$

Úlomky, jejichž původní úhel tak byl menší než α_d, dopadly na zem, zatímco ostatní jsou ještě ve vzduchu. Útvar, jehož objem nyní hledáme, je tak kulový vrchlík. Objem kulového vrchlíku spočítáme jako $V = \pi h^2\left(3r - h\right)/3$, kde r je poloměr koule a h je výška od uťaté stěny. V našem případě je h výška úlomků nad zemí, které vyletěly po rozpadu rachejtle kolmo vzhůru v čase τ, tedy

$$h = H + \left(u + v\right)\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 98{,}7\,\mathrm{m}\,,$$

zatímco poloměr je $r = v\tau = 82{,}5\,\mathrm{m}$. Hledaný objem tak je

$$V = \frac{\pi\left(H + \left(u+v\right)\tau - \frac{1}{2}g\tau^2\right)^2}{3}\left(2v\tau - H - u\tau + \frac{1}{2}g\tau^2\right)\,,$$

$$V = \frac{\pi\left(v_0\left(T+\tau\right) - \frac{1}{2}g\left(T+\tau\right)^2 + v\tau\right)^2}{3}\left(2v\tau - v_0\left(T+\tau\right) + \frac{1}{2}g\left(T+\tau\right)^2\right)\,,$$

což je přibližně $V \doteq 1{,}52\cdot 10^6\,\mathrm{m^3}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 43 ... srážka elektronů 6 bodů

V jednom urychlovači se sráží proti sobě letící elektrony, z nichž každý má energii 104,5 GeV. *Ve druhém urychlovači létají elektrony s energií* 209 GeV *na terč tvořený stacionárními elektrony. Kolikrát více energie je možné využít na tvorbu hmoty v prvním urychlovači oproti druhému?* *Jindra hrál „elektrony, elektrony, duc.“*

Elektrony v obou urychlovačích jsou vysoce relativistické $E \gg m_0 c^2$, kde $m_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \doteq \doteq 511{,}0\,\mathrm{keV/c^2}$ je klidová hmotnost elektronu, kterou jsme našli v „přehledu konstant“. Součet energií srážejících se částic je v obou urychlovačích stejný, ale to neurčuje energii srážky. Ve druhém urychlovači se totiž pohybuje i střed hmotnosti systému obou elektronů. Kvůli zachování hybnosti při srážce se bude střed hmotnosti pohybovat i po srážce – část kinetické energie je tedy spojena s pohybem těžiště a nemůže být využita na tvorbu nových částic. Abychom našli energii využitelnou na tvorbu nových částic, musíme i ve druhém urychlovači přejít do soustavy spojené s těžištěm srážejících se elektronů.

U prvního urychlovače je situace jednoduchá – už jsme v soustavě spojené s těžištěm kolidujících elektronů. Oba elektrony jsou stejné a oba letí proti sobě se stejnou kinetickou energií, tudíž i se stejnou hybností a rychlostí. Energie využitelná na tvorbu nových částic je celková energie obou elektronů

$$E_1 = 2E_A = 209\,\mathrm{GeV}\,,$$

kde jsme označili E_A energii jednoho elektronu v prvním urychlovači. Ve druhém urychlovači má pohybující se elektron energii

$$E_B = \gamma m_0 c^2\,,$$

kde $E_B = 209\,\mathrm{GeV}$ a γ je Lorentzův faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Lorentzův faktor a rychlost elektronu jsou

$$\gamma = \frac{E_B}{m_0 c^2} = 4{,}090 \cdot 10^5\,,$$

$$v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0 c^2}{E_B}\right)^2}\,.$$

Těžiště soustavy se pohybuje rychlostí

$$u = \frac{\gamma m_0 v}{\gamma m_0 + m_0} = \frac{\gamma}{\gamma+1} v$$

směrem ke stacionárnímu elektronu. Nyní musíme relativisticky transformovat rychlosti obou elektronů a zjistit jejich rychlost vzhledem k těžišti. Rychlost letícího elektronu vzhledem k těžišti je

$$v_1 = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}} = \frac{v-\frac{\gamma}{\gamma+1}v}{1-\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\frac{1}{\gamma+1}}{1-\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{v^2}{c^2}} v = \frac{1}{\gamma+1-\gamma\frac{v^2}{c^2}} v\,.$$

Nyní využijeme definice γ a dosadíme do rovnice

$$v_1 = \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v = \frac{1}{1+\frac{1}{\gamma}}v = \frac{\gamma}{\gamma+1}v = u\,.$$

Stacionární elektron se pohybuje rychlostí

$$v_2 = u = \frac{\gamma}{\gamma+1}v$$

směrem k těžišti. Tím pádem celková dostupná energie při srážce je

$$E_2 = 2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}m_0c^2\,.$$

Zjednodušíme zlomek

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2}\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,.$$

Celková energie dostupná při srážce je

$$E_2 = 2\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}m_0c^2 \doteq 462{,}2\,\mathrm{MeV}\,.$$

Poměr dostupných energií k vytvoření nových částic mezi našimi dvěma urychlovači je

$$\eta = \frac{E_1}{E_2} = 452{,}2 \doteq 452\,.$$

Přestože součet kinetických energií elektronů je v obou urychlovačích stejný, tudíž k jejich urychlení musela být vykonána stejná práce, první urychlovač nabízí 640krát více energie využitelné k vytvoření nových částic. Proto se moderní velké urychlovače jako LHC staví tak, aby se srážely proti sobě letící částice.

Ke stejnému výsledku bychom došli i tak, kdybychom sečetli energie a hybnosti všech částic, odečetli jejich druhé mocniny a odmocnili

$$E^2 = \left(\sum_i E_i\right)^2 - c^2\left(\left|\sum_i \mathbf{p}_i\right|\right)^2\,.$$

Pro první urychlovač dostaneme

$$E_1 = \sqrt{(2E_A)^2 - c^2\,(|0|)^2} = 2E_A = 209\,\mathrm{GeV}\,.$$

Pro druhý urychlovač vychází

$$E_2 = \sqrt{(E_B+m_0c^2)^2-(\gamma m_0vc)^2} = \sqrt{((\gamma+1)m_0c^2)^2-\left(\gamma m_0c^2\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\right)^2} =$$

$$= m_0c^2\sqrt{(\gamma+1)^2-(\gamma^2-1)} = m_0c^2\sqrt{2\gamma+2} = 2\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}m_0c^2 \doteq 462{,}2\,\mathrm{MeV}\,.$$

Došli jsme ke stejnému výsledku jako s pracnější metodou počítání rychlosti vzhledem k těžišti. Poměr dostupných energií k vytvoření nových částic mezi našimi dvěma urychlovači opět vyjde stejný

$$\eta = \frac{E_1}{E_2} = 452{,}2 \doteq 452\,.$$

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 44 ... chceme dýchat na Everestu 7 bodů

Jaký by byl tlak vzduchu u hladiny moře, pokud by Země měla atmosféru se stejným teplotním výškovým profilem jako má dnes (tedy s lineářním poklesem teploty o $0{,}65\,\mathrm{^\circ C}$ *na* $100\,\mathrm{m}$ *výšky), ale ve výšce* $H = 8\,850\,\mathrm{m}$ *nad hladinou moře (tedy na Mount Everestu) by byl tlak* p_a*, tedy stejný, jako je dnes u hladiny moře? Teplotu u hladiny moře uvažujte* $T_0 = 15\,\mathrm{^\circ C}$*.*

Karel zase přemýšlel nad atmosférou.

Atmosféra drží pohromadě díky tíhové síle Země, proto tlak vzduchu chápeme jako tlak hydrostatický. Změna tlaku s výškou je potom jednoduše

$$\mathrm{d}p = -\rho g\,\mathrm{d}h\,,$$

kde ρ je neznámá hustota vzduchu v dané výšce a tíhové zrychlení g se s výškou mění jen velmi málo, proto ho považujeme za konstantní. Dále víme, že pro vzduch platí stavová rovnice, odkud vyjádříme závislost hustoty na tlaku a teplotě jako

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p}{T}\frac{M_\mathrm{m}}{R}\,,$$

kde $M_\mathrm{m} = 28{,}9\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ je molární hmotnost vzduchu. Tu můžeme najít v tabulkách, na internetu nebo ji vyjádřit z hodnot normálního tlaku, hustoty a teploty v seznamu konstant. Ještě známe závislost teploty na výšce nad mořem, ta je rovna $T = T_0 - \tau h$, kde $\tau = 0{,}65\,\mathrm{^\circ C}/100\,\mathrm{m}$.

Zkombinováním vztahů dostaneme diferenciální rovnici pro tlak jako funkci výšky

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{M_\mathrm{m} g}{RT_0}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{1-\frac{\tau}{T_0}h}\,.$$

Rovnici integrujeme a dosadíme *okrajové podmínky*: tlak ve výšce H je p_a a tlak ve výšce $0\,\mathrm{m}$ je p_0.

$$[\ln p]_{p_0}^{p_\mathrm{a}} = -\frac{M_\mathrm{m} g}{RT_0}\left[\ln\left(1-\frac{\tau}{T_0}h\right)\cdot\left(-\frac{T_0}{\tau}\right)\right]_0^H$$

odkud

$$p_0 = p_a\left(1-\frac{\tau}{T_0}H\right)^{-\frac{M_\mathrm{m} g}{R\tau}} \doteq 327\,\mathrm{kPa}\,.$$

Jiří Kohl
`jiri.kohl@fykos.cz`

Úloha 45 ... jezírko na zrcadle reloaded 7 bodů

Jindra položil na stůl duté kulové zrcadlo s poloměrem křivosti $r = 2{,}00\,\mathrm{m}$ *a průměrem* $D = 12{,}0\,\mathrm{cm}$. *Optická osa zrcadla míří vzhůru. Na zrcadlo nalil vodu s indexem lomu* $n = 1{,}33$ *tak, že vodní hladina má průměr* $d = 6{,}00\,\mathrm{cm}$. *Jindra celou plochu zrcadla osvítil světelnými paprsky rovnoběžnými s optickou osou. V jaké výšce nad stolem by se na hypotetickém stínítku utvořil obraz s nejmenším vnějším průměrem?* *Jindrovi se stýská po letním koupání.*

Ohnisko dutého zrcadla je bod, kde se protnou odražené paprsky vyslané na zrcadlo rovnoběžně s optickou osou. Ohnisková vzdálenost je pak vzdálenost ohniska od vrcholu zrcadla (bod na povrchu zrcadla ležící na optické ose). V paraxiální aproximaci předpokládáme, že úhly všech přicházejících i odražených světelných paprsků s optickou osou jsou malé $\alpha \ll 1$. Paprsky rovnoběžné s optickou osou dopadající na povrch zrcadla v kolmé vzdálenosti h od optické osy, se odrazí pod úhlem $\alpha \approx 2h/r$. Tudíž v paraxiální aproximaci všechny odražené paprsky protnou optickou osu ve stejné vzdálenosti

$$f_0 = \frac{h}{\alpha} = \frac{r}{2}$$

nezávislé na h. Ohnisková vzdálenost dutého kulového zrcadla se rovná polovině poloměru křivosti. Část zrcadla nepokrytá vodou má tudíž ohniskovou vzdálenost

$$f_0 = \frac{r}{2} = 1{,}00\,\mathrm{m}.$$

Část zrcadla pokrytá vodou má kratší ohniskovou vzdálenost. Směr paprsků přicházejících rovnoběžně s optickou osou není kolmou vodní hladinou ovlivněn. Avšak paprsky odražené od zrcadla dopadají na rozhraní voda – vzduch pod úhlem ke kolmici $\alpha \approx 2h/r$, kde h je kolmá vzdálenost od optické osy. Tyto paprsky se podle Snellova zákona zlomí pod úhlem $\alpha' \approx n\alpha$ a protnou optickou osu blíž, než je původní ohnisková vzdálenost f_0, a to ve vzdálenosti

$$f = \frac{h}{\alpha'} = \frac{r}{2n} = 0{,}752\,\mathrm{m}.$$

Světlo odražené vnější částí zrcadla bez vody vytváří světelný prstenec s vnějším průměrem

$$\delta_0 = D\frac{|f_0 - x|}{f_0},$$

kde x je vzdálenost hypotetického stínítka od vrcholu zrcadla. Centrální část zrcadla pokrytá vodou pak vytváří světelený kruh s průměrem

$$\delta = d\frac{|f - x|}{f}.$$

Nejmenší vnější průměr obrazu nastane v takové vzdálenosti x, kde $\delta_0 = \delta$. Pro tuto polohu nutně platí $f < x < f_0$. Řešíme tedy rovnici

$$D\frac{f_0 - x}{f_0} = d\frac{x - f}{f}$$

pro x. Dosadíme $f = f_0/n$ a máme rovnici

$$D\frac{f_0 - x}{f_0} = nd\frac{x - \frac{f_0}{n}}{f_0},$$

což dále upravíme na

$$x(D + nd) = Df_0 + df_0 .$$

Řešením rovnice je

$$x = \frac{f_0(D + d)}{D + nd} ,$$

což po dosazení čísel ze zadání dá $x = 0{,}901\,\mathrm{m}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha 46 ... trychtýř na mince

7 bodů

Uvažujme těžkou půlkulovou misku o průměru 19 cm a vezměme hmotný bod, který se v ní dokáže pohybovat zcela bez tření. Ten vypustíme na jejím horním okraji rychlostí $0{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ ve vodorovném směru. Jaká může být minimální výška nad dnem nádoby, do které se hmotný bod v rámci svého putování miskou může dostat? *Jardovi se na ulici vysypala peněženka.*

Polohu hmotného bodu můžeme vždy jednoznačně určit dvěma parametry. Jednak úhlem θ, který svírá průvodič ze středu horní kružnice k hmotnému bodu s vodorvnou rovinou, a jednak úhlem φ, který popisuje posunutí kolem rotační osy polokoule od začátku pohybu. Z počáteční podmínky máme $\theta(t = 0) = 0\,^\circ$ a můžeme položit $\varphi(t = 0) = 0\,^\circ$. Označme dále $R = \frac{19\,\mathrm{cm}}{2} = 9{,}5\,\mathrm{cm}$.

Na hmotný bod působí během jeho pohybu v polokouli dvě síly – tíhová síla a reakce podložky. Při pohledu ze shora si můžeme uvědomit, že tíhová síla působí vždy dolů a reakce polokoule vždy do středu polokoule. Není zde tedy žádná síla, která by při pohledu svrchu působila tečně na pohyb bodu. To implikuje zákon zachování svislé složky momentu hybnosti hmotného bodu vůči rotační ose symetrie celé polokoule. Můžeme jej zapsat jako

$$\left(\mathbf{L}\right)_z = m\left(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\right)_z = m r_x v_y - m r_y v_x .$$

Uvažujme takové natočení os, že $r_y = 0$. Pak zároveň platí $r_x = R\cos\theta$. Složka rychlosti v_y míři tečně k vodorovné kružnici, na které se zrovna hmotný bod nachází, a její velikost je $v_y = R\cos\theta\dot{\varphi}$, kde $\dot{\varphi}$ je úhlová rychlost kolem osy symetrie celé polokoule. Dostáváme tak zákon zachování svislé složky momentu hybnosti jako $L_z = mR^2\cos^2\theta\dot{\varphi}$.

Protože se hmotný bod pyhbuje bez tření, platí v celé úloze také zákon zachování mechanické energie, která je

$$E = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\cos^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - gR\sin\theta .$$

Z těchto dvou zachovávajících se veličin už dokážeme dopočítat zbytek úlohy. Musíme ještě z počátečních podmínek určit jejich hodnoty. Pro L_z máme $L_z = mR^2\frac{v}{R} = mvR$, zatímco pro energii $E = \frac{1}{2}mv^2$. Ze zákona zachováníť L_z dosadíme za $\dot{\varphi}$ do vztahu pro energii a dostáváme

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + \frac{v^2}{\cos^2\theta}\right) - gR\sin\theta ,$$

odkud vyjádříme $\dot{\theta}^2$ jako

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{R^2}\left(2gR\sin\theta - v^2\operatorname{tg}^2\theta\right) .$$

Nyní přijde na řadu zásadní úvaha. Pro libovolně malou počáteční rychlost v se při zvětšování θ dostaneme do situace, kde pravá strana rovnice bude kvůli chování funkce $\operatorname{tg} x$ záporná. Na levé straně je ovšem kvadrát reálného čísla, tato strana musí být vždy nezáporná. Kritický úhel θ nastane, když bude úhlová rychlost $\dot{\theta}$ nulová. V tento okamžik se změní její znaménko a hmotný bod začne opět stoupat. Dostáváme tedy rovnici

$$2gR\sin\theta_\mathrm{c} = v^2 \operatorname{tg}^2\theta_\mathrm{c} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\theta_\mathrm{c} + \frac{v^2}{2gR}\sin\theta_\mathrm{c} - 1 = 0\,.$$

Z této kvadratické rovnice najdeme $\sin\theta_\mathrm{c}$ jako

$$\sin\theta_\mathrm{c} = -\frac{v^2}{4gR} + \sqrt{\frac{v^4}{16g^2R^2} + 1}\,,$$

kde jsme zvolili kladné znaménko, protože očekáváme kladnou hodnotu výsledku. Tento výraz je vždy menší než 1, takže vždy můžeme najít úhel θ_c. Tento výsledek odpovídá minimální výšce

$$h = R\left(1 - \sin\theta_\mathrm{c}\right) = R\left(1 + \frac{v^2}{4gR} - \sqrt{\frac{v^4}{16g^2R^2} + 1}\right) = 1{,}5\,\mathrm{cm}\,,$$

do které se hmotný bod může dostat.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 47 ... bod skáče přes kvádr — 7 bodů

V zemi geometrických tvarů si hmotný bod v klidu seděl na vodorovné rovině, když si náhle všiml, že se k němu rychlostí $v_k = 6{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ řítí kvádr o výšce $h = 20{,}0\,\mathrm{cm}$ a délce $l = 280\,\mathrm{cm}$. Hmotný bod usoudil, že nemá čas kvádru uhnout do strany, tak ho raději přeskočí. Jakou minimální velikost musí mít rychlost, se kterou hmotný bod potřebuje vyskočit, aby se mu kvádr podařilo přeskočit? Hmotný bod nemusí skákat jen svisle vzhůru.

Lego měl už celkem dlouho v nápadovníku.

Ak bod skočí po optimálnej (čiže takej, ktorá má minimálnu potrebnú rýchlosť) trajektórii, určite „lízne" prednú hornú hranu, prestane stúpať presne v momente keď bude nad stredom kvádra a potom počas padania opäť „lízne" zadnú hornú hranu. Existuje ale nekonečné množstvo trajektórii, ktoré splňujú tento popis a my hľadáme tú z nich, ktorá potrebuje minimálnu rýchlosť.

Ak si veľkosť rýchlosti, ktorou sa bod odrazil zo zeme označíme ako v_0 a veľkosť rýchlosti, ktorú bude mať, keď sa dotkne prednej hrany kvádru ako v_1, potom zo zákona zachovania energie bude platiť

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2$$
$$v_0 = \sqrt{2gh + v_1^2}\,,$$

čiže nám stačí minimalizovať veľkosť rýchlosti v_1 a potom dosadiť.

Ak teda začneme pozorovať pohyb bodu v momente, kedy sa dotýka prednej hrany, sú podmienky, že prestane stúpať presne nad stredom kvádra a že sa cestou nadol dotkne zadnej hrany ekvivalentné (môžete si overiť, že matematicky je to fakt tá istá podmienka). My použijeme tú, že prestane stúpať presne nad stredom kvádra.

Čas za ktorý bude mať bod rovnakú horizontálnu polohu, ako stred kvádra, dostaneme tak, že podelíme ich vzdialenosť (ktorá je najprv rovná polovici dĺžky kvádra, čiže $l/2$) ich vzájomnou rýchlosťou, ktorá je $v_{1x} + v_k$. Horizontálnu zložku rýchlosti hmotného bodu sme si označili v_{1x}. Tá je kladná, ak bod skočí "kvádru naproti" a naopak záporná, ak skočí v rovnakom smere, ako sa hýbe kváder. Je intuitívne, že ak chce bod minimalizovať potrebnú rýchlosť, viac sa mu oplatí skákať kvádru naproti (aby ich vzájomná rýchlosť bola súčtom ich rýchlostí), no nie je nutné to dopredu predpokladať.

Čas, za ktorý hmotný bod prestane stúpať dostaneme tak, že vydelíme jeho vertikálnu zložku rýchlosti (označme ju v_{1y}) gravitačným zrýchlením g.

Potom podmienku, že prestane stúpať nad stredom kvádra môžeme vyjadriť ako rovnosť týchto dvoch časov

$$\frac{l/2}{v_{1x} + v_k} = \frac{v_{1y}}{g} \,.$$

Táto podmienka nám teda určuje, pre ktoré kombinácie v_{1x} a v_{1y} prestane bod stúpať presne nad stredom kvádra. Nás ale zaujíma tá z týchto kombinácii, ktorá minimalizuje veľkosť rýchlosti, ktorú si môžeme vyjadriť ako $|v_1| = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}$. Minimalizovať veľkosť je zároveň ekvivalentné s minimalizovaním druhej mocniny veľkosti, čiže sa zbavíme tej odmocniny. Za v_{1y} si dosadíme z podmienky na zastavenie stúpania nad stredom kvádru, čím dostaneme

$$v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_{1x}^2 + \left(\frac{lg}{2}\frac{1}{v_{1x} + v_k}\right)^2 \,,$$

kde sme vyjadrili to čo chceme minimalizovať (čiže v_1^2) ako funkciu jednej premennej (konkrétne v_{1x}). Môžeme teda nájsť extrémy položením derivácie podľa tejto premennej rovnej nule

$$\frac{\mathrm{d}v_1^2}{\mathrm{d}v_{1x}} = 2v_{1x} + \frac{l^2g^2}{4}\frac{-2}{(v_{1x} + v_k)^3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_{1x} = \frac{l^2g^2}{4}\frac{1}{(v_{1x} + v_k)^3} \,,$$

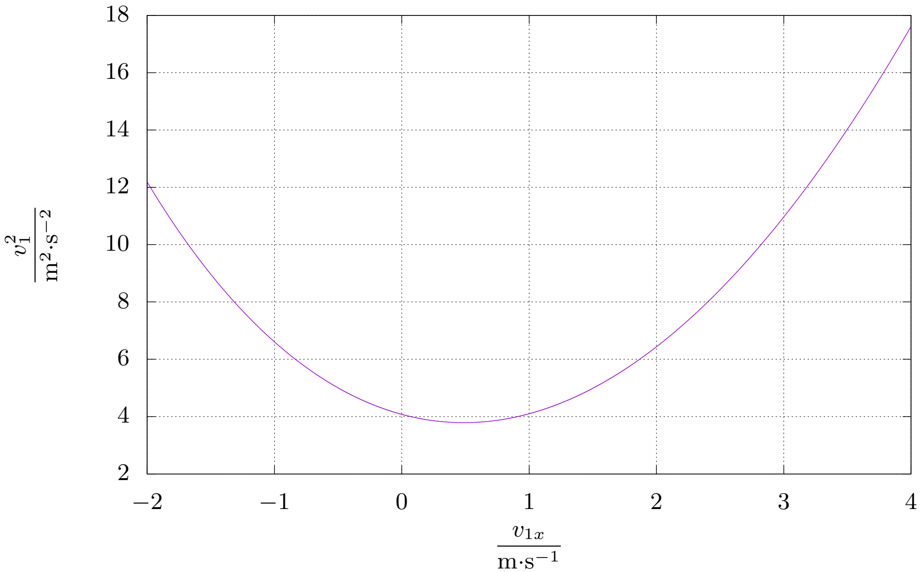
čo je rovnica štvrtého rádu, ktorú sa nám nechce riešiť (a navyše by sme aj tak dostali 4 korene a museli zisťovať, ktorý z nich predstavuje globálne minimum), takže namiesto toho vykreslíme závislosť v_1^2 na v_{1x} v grafe 7.

Vidíme, že výraz dosahuje minimum pre $v_1^2 \doteq 3{,}789\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-2}}$ pre $v_{1x} \doteq 0{,}487\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (čo sedí s intuíciou, že výhodnejšie je skákať kvádru naproti). Ak by sa niekto obával, či nemôže byť niekde nejaké ešte menšie minimum, ktoré len nevidíme, stačí si uvedomiť, že platí $v_1^2 > v_{1x}^2$, čiže pre $|v_{1x}| > \sqrt{3{,}789\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-2}}} \doteq 1{,}95\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ nehrozí, že by sme našli menšie lokálne minimum.

Potom už len nezabudnúť dosadiť to späť do v_1^2 a následne do v_0, čím dostaneme, že zo zeme sa bod musí odraziť minimálne s rýchlosťou o veľkosti

$$v_0 = \sqrt{2gh + v_1^2} \doteq 2{,}78\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`



Obrázek 7: Závislost v_1^2 na v_{1x}

Úloha 48 ... kmitající čočka — 8 bodů

Na optické ose čočky o ohniskové vzdálenosti $f = 8{,}5\,\mathrm{cm}$ ve vzdálenosti $A = 11\,\mathrm{cm}$ od jejího středu umístíme izotropní zdroj světla. K čočce připojíme pružinu tak, že může konat torzní kmity. Osa kmitání je kolmo k optické ose čočky. Moment setrvačnosti čočky vůči této ose je $J = 63\,\mathrm{kg{\cdot}mm^2}$ a moment síly působící na čočku je úměrný úhlu natočení z rovnovážné polohy jako $M = -c\varphi$, kde $c = 3{,}7\,\mathrm{mJ}$. Jakou maximální rychlostí se pohybuje obraz světelného bodu, pokud čočku vychýlíme o $5\,^\circ$ z rovnovážné polohy a pustíme?

Jarda chtěl spojit optiku a kmitání.

Nejprve se zamyslíme, jaký pohyb koná čočka. Ze zadání známe působící moment jako $M = -c\varphi$, z druhé impulsové věty zase víme, že časová změna momentu hybnosti je rovna působícímu momentu sil. Dostáváme proto

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi\,,$$

což je vlastně rovnice pro harmonický oscilátor. Jejím řešením je

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t)\ ,$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{c}{J}}$ je úhlová rychlost kmitání čočky kolem své osy.

Na optické ose čočky je pak poloha vzoru v závislosti na čase z jednoduché geometrie určena jako $a = A\cos\varphi$ a jeho vzdálenost od osy je $y = A\sin\varphi$. Ze zobrazovací rovnice se zobrazí obraz bodu na vzdálenost $a' = \frac{af}{a-f}$ na ose čočky. Protože z geometrické konstrukce známe pravidlo, že paprsek jdoucí středem čočky se neláme, víme, že obraz bude na spojnici předmětu a středu čočky. Tato přímka je odkloněna o úhel φ od optické osy, proto je poloha obrazu ve vzdálenosti

$$A' = \frac{a'}{\cos\varphi} = \frac{Af}{A\cos\varphi - f} \,.$$

Dosazením za úhel φ dostaneme časovou závislost polohy obrazu jako

$$A' = \frac{a'}{\cos\varphi} = \frac{Af}{A\cos\left(\varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{c}{J}}t\right)\right) - f} \,.$$

Derivací podle času najdeme rychlost obrazu v závislosti na čase

$$V' = \frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}t} = \frac{-Af}{\left(A\cos\left(\varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{c}{J}}t\right)\right) - f\right)^2} \left(-A\sin\left(\varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{c}{J}}t\right)\right)\right)\left(-\varphi_0\sqrt{\frac{c}{J}}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{J}}t\right)\right) \,.$$

Tuto funkci si vykreslíme v nějakém grafickém editoru a zjistíme, že velikost rychlosti je maximálně $4{,}9\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 49 ... epic fail

8 bodů

Radek a Radka si vesele užívají jízdy na kolotoči, přičemž Radka sedí o čtvrtkruh před Radkem (ve směru otáčení). V záchvatu zlomyslnosti Radka mrští přímo po Radkovi shnilým rajčetem, ale po čase menším než polovina periody otáčení kolotoče se rajče zjeví zpět v Radčině obličeji. Určete velikost rychlosti (jako podíl $\kappa > 0$ vůči obvodové rychlosti kolotoče), kterou Radka rajče hodila. Tato groteska se odehrála ve stavu beztíže.

Radka se nechtěla trefit. . . Sebe nechtěla trefit.

Jelikož rychlost máme vyjádřit v jednotkách obvodové rychlosti, položme obvodovou rychlost rovnou 1. Potom κ bude velikost rychlosti, kterou Radka rajče hodila (vzhledem k sobě). Jelikož ze svého pohledu házela přímo na Radka, musel být úhel, který v okamžik výhozu svíral vektor rychlosti rajčete s průvodičem v *rotující* soustavě, roven $\pi/4$. Tento průvodič ohraničuje dvě poloroviny.

Má-li se rajče vrátit zpátky k Radce za čas menší než polovina periody, musí rychlost rajčete v *nerotující* soustavě v okamžik výhozu mířit do opačné poloroviny, než ve které se nachází Radek.[2] V této polorovině pak rajče sejme Radku.

Odteď úlohu řešme v nerotující (inerciální) soustavě. V okamžik výhozu byla radiální složka rychlosti rajčete rovná $\kappa/\sqrt{2}$, zatímco tečná $1 - \kappa/\sqrt{2}$ (ve směru rotace). Úhel α, který rychlost v nerotující soustavě svírá v okamžik výhozu rajčete s průvodičem, tedy splňuje

$$\cos\alpha = \frac{\kappa/\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa}} \,,$$

$$\sin\alpha = \frac{1 - \kappa/\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa}} \,.$$

[2] Toho lze určitě docílit tak, že volíme $\kappa < \sqrt{2}$.

Neboť velikost rychlosti rajčete v nerotující soustavě spočteme z kosinové věty jako

$$v = \sqrt{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa}\,.$$

Nechť poloměr kolotoče je také jednotkový, výsledek na něm totiž určitě nebude záviset. Vzdálenost, kterou rajče uletí, než se vrátí na obvod kolotoče, zjistíme z rovnoramenného trojúhelníku (s vrcholy Radka - střed kolotoče - bod, kde rajče sejme Radku, přičemž úhel u prvního a posledního vrcholu je α) jako

$$s = 2\cos\alpha\,.$$

Rajče se tedy na obvod kolotoče vrátí za čas

$$\tau = \frac{s}{v} = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa}} = \frac{\sqrt{2}\kappa}{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa}\,.$$

Tento výraz se nyní pokusíme upravit za použití vzorců pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu. Zjistíme, že

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}\kappa - \kappa^2}{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa}$$

a

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\sqrt{2}\kappa - 1}{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa}\,.$$

A tedy τ můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\sqrt{2}\kappa}{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa} = \\ &= \frac{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa + \sqrt{2}\kappa - 1 - \kappa^2 + \sqrt{2}\kappa}{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa} = \\ &= 1 + \frac{\sqrt{2}\kappa - 1 - \kappa^2 + \sqrt{2}\kappa}{1 + \kappa^2 - \sqrt{2}\kappa} = \\ &= 1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha\,.\end{aligned}$$

Má-li se rajče rozplácnout o Radčin obličej, musíme ale zároveň mít

$$\tau = \pi - 2\alpha\,.$$

Jelikož čas τ, který Radce potrvá dorotovat do bodu, kde se její obličej střetne s rajčetem díky jednotkové rychlosti otáčení kolotoče odpovídá přímo úhlu jeho otočení. Po substituci $x = 2\alpha$ tedy řešíme rovnici

$$1 + x + \sin x + \cos x = \pi\,.$$

Zřejmým kořenem je $x = \pi$, což ovšem dává $\kappa = 0$, tedy nulovou rychlost rajčete (takto se ale k Radce rajče vrátí poněkud triviálně). Druhý (a jediný další) kořen najdeme iterativně jako

$$x \doteq 0{,}729\,581\,5\,.$$

Odtud po vyjádření $\operatorname{tg}\alpha$ jako podílu sinu a kosinu dostaneme rychlost rajčete

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} \doteq 1{,}023\,397\,.$$

Radka Křížová
`radka.krizova@fykos.cz`

Úloha 50 ... přerušované napětí 7 bodů

V obvodu je sériově zapojen kondenzátor s kapacitou $C = 47\,\mathrm{nF}$ a rezistor s odporem $R = 220\,\mathrm{k\Omega}$ ke zdroji přerušovaného napětí s periodou $2T = 20\,\mathrm{ms}$. Průběh napětí v jedné periodě je

$$V(t) = \begin{cases} 0\,\mathrm{V} & -T < t < 0; \\ 9{,}0\,\mathrm{V} & 0 \leq t < T. \end{cases}$$

Určete rozdíl mezi nejvyšší a nejnižší hodnotou napětí na kondenzátoru po ustálení.

Jindra si hrál s vypínačem v DC obvodu.

Mezi nábojem Q a napětím V_c na kondenzátoru platí vztah

$$Q = CV_\mathrm{c}\,,$$

kde C je kapacita kondenzátoru.

Ve stádiu periody $0 \leq t < T$ je na zdroji konstantní napětí $V_0 = 9{,}0\,\mathrm{V}$. Během této fáze napětí na kondenzátoru roste a dosahuje maxima v okamžiku přepnutí zdroje do stádia $V = 0\,\mathrm{V}$. Tehdy začne napětí klesat a nejnižší hodnoty nabývá v okamžiku opětovného přepnutí do stádia $V = V_0 = 9{,}0\,\mathrm{V}$. Nazvěme nejnižší napětí na kondenzátoru V_- a nejvyšší napětí V_+.

Ve stadiu napětí na zdroji $V = V_0$ se náboj na kondenzátoru Q řídí diferenciální rovnicí

$$V_0 - \frac{Q}{C} - R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

S využitím závislosti $Q = CV_\mathrm{c}$ můžeme přepsat diferenciální rovnici pro napětí V_c na kondenzátoru jako

$$V_0 - V_\mathrm{c} - RC\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Rovnice má počáteční podmínku $V_\mathrm{c}(0) = V_-$. Řešením této diferenciální rovnice je funkce

$$V_\mathrm{c}(t) = V_0 - (V_0 - V_-)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,.$$

V čase $t = T$ musí platit

$$V_+ = V_0 - (V_0 - V_-)\mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}\,.$$

Ve stadiu nulového napětí na zdroji se náboj Q na kondenzátoru řídí diferenciální rovnicí

$$\frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

což můžeme opět přepsat pomocí napětí V_c na kondenzátoru do tvaru

$$V_\mathrm{c} + RC\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Rovnice má počáteční podmínku $V_\mathrm{c}(0) = V_+$. Řešením této diferenciální rovnice je funkce

$$V_\mathrm{c}(t) = V_+\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,.$$

V čase $t = T$ musí platit

$$V_- = V_+\mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}\,.$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých V_-, V_+, kterou musíme vyřešit

$$V_- = V_+ \mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}} \,,$$

$$V_+ = V_0 - (V_0 - V_-)\mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}} \,.$$

Z první rovnice dosadíme místo V_- do druhé rovnice a obdržíme

$$V_+ = V_0 \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}} \,.$$

To dosadíme zpět do první rovnice místo V_+ a získáme

$$V_- = V_0 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}}{1 + \mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}} \,.$$

Rozdíl mezi nejvyšším a nejnižším napětím na kondenzátoru je

$$V_+ - V_- = V_0 \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}}{1 + \mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}} \,.$$

Po dosazení čísel ze zadání dostaneme číselný rozdíl $4{,}04\,\mathrm{V} \doteq 4{,}0\,\mathrm{V}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

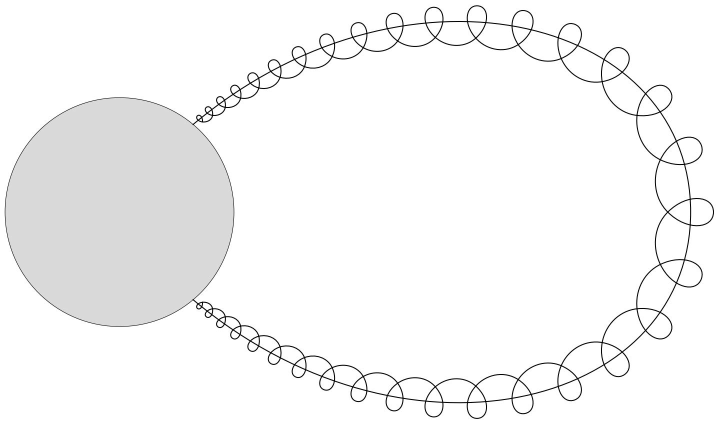
Úloha 51 ... Van Allenovi to září — 8 bodů

V rovině rovníku je ve vzdálenosti dvou zemských poloměrů od středu Země proton o energii $E = 1\,\mathrm{keV}$, který míří pod úhlem $\alpha = 45\,^{\circ}$ od siločáry směrem k severnímu pólu. Jak se blíží k Zemi, v jednu chvíli se vlivem magnetického zrcadla odrazí a začne se zase vracet směrem k jižnímu pólu. Určete zeměpisnou (magnetickou) šířku, ve které se tak stane. Zemské magnetické pole považujte za dipól.

Kačka dostala výsledek, ale chtěla si to ověřit.

Proton v magnetickém poli Země vykonává několik pohybů, nejjednodušší je cyklotronový pohyb kolem magnetické siločáry, tedy část pohybu kolmá k siločáře. Ve směru rovnoběžném k siločáře se částice pohybuje rovnoměrně. Avšak když se podél magnetické siločáry proton blíží k pólu, amplituda magnetické indukce se zvětšuje, protože se v tomto případě musí zachovávat magnetický moment. Z důvodu zachování magnetického momentu $\mu = mv_\perp^2/(2B)$ se rychlost rovnoběžná s magnetickým polem mění na rychlost kolmou k magnetickému poli. Magnetické pole Země považujeme za dipól, vyjádření magnetického pole v polárních souřadnicích je $\mathbf{B}(r,\theta,\varphi) = \left(B_0 R_E^3/r^3\right)(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$ a tvar magnetické siločáry, která je v rovině rovníku vzdálená od středu Země L, je $r(\theta) = L\sin^2(\theta)$. Z toho vyjádříme podmínku pro odraz ze zachování magnetického momentu:

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B(2R_Z, 0)} = \frac{mv^2}{2B(2R_z \sin^2\theta_r, \theta_r)} .$$



Obrázek 8: Znázornění chování protonu.

Dosadíme za magnetické pole a vyjádříme úhel θ_r:

$$\frac{mv^2\sin^2\alpha}{2B_0\frac{R_E^3}{(2R_E)^3}} = \frac{mv^2}{2B_0\frac{R_E^3}{(2R_E\sin^2\theta_r)^3}\sqrt{4\cos^2\theta_r+\sin^2\theta_r}}\,,$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\sin^6\theta_r}{\sqrt{4\cos^2\theta_r+\sin^2\theta_r}}\,,$$

$$\sin^2\alpha\sqrt{4-3\sin^2\theta_r} = \sin^6\theta_r\,,$$

$$\sin^4\alpha\left(4-3\sin^2\theta_r\right) = \sin^{12}\theta_r\,.$$

Když použijeme substituci $x = \sin^2\theta_r$ dostáváme rovnici $\sin^4\alpha\,(4-3x) = x^6$, která je analyticky neřešitelná. Když však dosadíme za známý úhel $\alpha = 45^\circ \Rightarrow \sin^2\alpha = 0{,}5$, tak můžeme úlohu řešit numericky, kdy dostaneme kladný výsledek $\sin^2\theta_r = 0{,}846 \Rightarrow \theta_r = 66{,}87^\circ$. Magnetická šířka je pak doplňkový úhel, tedy $23{,}13^\circ$.

Kateřina Rosická
`kacka@fykos.cz`

Úloha 52 ... letící bahno 8 bodů

Po rovině se konstantní rychlostí $v = 15{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ valí pneumatika o vnějším průměru $d = 63{,}2\,\mathrm{cm}$. Najednou se od rotujícího obvodu pneumatiky oddělí kus bahna, letí vzduchem a nakonec dopadne na zem. Pneumatika posléze přejede na zem spadlý kus bahna stejným místem, odkud se bahno původně oddělilo. Jak dlouho leželo bahno na zemi, než jej pneumatika přejela? Neuvažujte odpor vzduchu při letu kusu bahna. Bahno nespadlo dále než $4{,}00\,\mathrm{m}$ podél vodorovné osy od místa vypuštění. *Okolo Jindry prosvištělo za jízdy upadlé kolo traktoru.*

Úhel α na kole budeme měřit od svislého směru. Ve vztažné soustavě spojené se zemí má bahno vektor rychlosti

$$\mathbf{u} = v\,(1+\cos\alpha, -\sin\alpha)\,.$$

V okamžiku oddělení kusu bahna od kola bude bahno s tímto počátečním vektorem rychlosti pokračovat ve volném pádu na zem. Zatím ale neznáme úhel α určující místo, kde dojde k oddělení kusu bahna. Odvodíme tedy rovnici, z níž úhel α spočítáme. Kus bahna začne svůj pád na zem ve výšce

$$h = r(1 + \cos\alpha),$$

kde $r = 31{,}6\,\mathrm{cm}$ je poloměr pneumatiky. Jeho svislá poloha y a vodorovná poloha x vzhledem k bodu vypuštění jsou

$$\begin{aligned} y &= -vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,,\\ x &= v(1 + \cos\alpha)t\,. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice vyjádříme čas $t = x/(v\ (1 + \cos\alpha))$ a dosadíme do první rovnice, čímž dostaneme závislost $y = y(x)$

$$y = -\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}x - \frac{g}{2v^2(1+\cos\alpha)^2}x^2\,.$$

Bahno zasáhne zemi, když $y = -h = -r(1 + \cos\alpha)$, tudíž dostáváme vztah mezi místem dopadu x a úhlem oddělení α

$$\begin{aligned} \frac{g}{2v^2(1+\cos\alpha)^2}x^2 + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}x - r(1+\cos\alpha) &= 0\,,\\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{v^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{g}x - \frac{rv^2(1+\cos\alpha)^3}{g} &= 0\,. \end{aligned}$$

Kořeny této rovnice jsou

$$x_{1,2} = -\frac{v^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{g}\right)^2 + \frac{2rv^2(1+\cos\alpha)^3}{g}}\,.$$

Nás zajímá jen kladný kořen

$$x_1 = (1+\cos\alpha)\left(-\frac{v^2\sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v^2\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2v^2r(1+\cos\alpha)}{g}}\right).$$

Toto je ovšem x-ová poloha vzhledem k bodu oddělení kusu bahna. My musíme znát x-ovou polohu vzhledem k bodu dotyku kola se zemí v okamžiku oddělení bahna. Bod oddělení vzhledem k bodu dotyku má x-ovou souřadnici $r\sin\alpha$.

Aby kolo najelo na kus bahna stejným místem, odkud předtím onen kus odletěl, musí se kolo pootočit o úhel $\pi - \alpha$, případně ještě může udělat k celých otoček. Bahno musí dopadnout do vzdálenosti $r(2k\pi + \pi - \alpha)$ od bodu dotyku kola se zemí. Tím pádem dostáváme rovnici pro úhel oddělení

$$r(2k\pi + \pi - \alpha) = r\sin\alpha + (1+\cos\alpha)\left(-\frac{v^2\sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v^2\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2v^2r(1+\cos\alpha)}{g}}\right),$$

kterou musíme vyřešit numericky. Jestliže obě strany rovnice vydělíme r, můžeme zavést bezrozměrný parametr $A = v^2/(gr)$, což zpřehlední zápis rovnice

$$(2k+1)\pi = \alpha + \sin\alpha + (1+\cos\alpha)\left(-A\sin\alpha + \sqrt{(A\ \sin\alpha)^2 + 2A\ (1+\cos\alpha)}\right) .$$

Po dosazení $A = 72{,}58$ podle čísel ze zadání pro různá k najdeme (např. s pomocí funkce `scipy.optimize.fsolve()` v Pythonu) numericky řešení

$$\begin{aligned} k &= 0, & \alpha &= \pi\,\mathrm{rad}, & x_1 &= 0\,\mathrm{m},\\ k &= 1, & \alpha &= 0{,}407\,0\,\mathrm{rad}, & x_1 &= 2{,}72\,\mathrm{m},\\ k &= 2, & \alpha &= 0{,}204\,2\,\mathrm{rad}, & x_1 &= 4{,}84\,\mathrm{m}.\\ &\vdots & &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Případ $k \geq 2$ nevyhovuje podmínce ze zadání, že bahno dopadlo blíže než $4{,}00\,\mathrm{m}$ vodorovně od místa vypuštění. Případ $k = 0$ zase nevyhovuje tím, že bahno neletělo vzduchem. Jde o triviální případ, kdy bahno zůstalo na pneumatice. Jediné možné řešení je tedy pro $k = 1$.

Kolo ujelo vzdálenost $D = r(2\pi + \pi - \alpha)$ za čas

$$t_k = \frac{D}{v} = 0{,}190\,0\,\mathrm{s}.$$

Bahno před dopadnutím na zem letělo vzduchem po dobu

$$t = \frac{x_1}{v(1+\cos\alpha)} = 0{,}094\,7\,\mathrm{s}.$$

Doba, po kterou bahno leželo na zemi, než bylo znovu přejeto, byla $T = t_k - t = 0{,}095\,3\,\mathrm{s}$

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 53 ... maximální aktivita II — 9 bodů

Jindra má $N_0 = 10^9$ atomů radioaktivního izotopu ^{212}Bi. Ten se s pravděpodobností $P_\beta = 64{,}06\,\%$ rozpadá beta rozpadem na izotop ^{212}Po a s pravděpodobností $P_\alpha = 35{,}94\,\%$ alfa rozpadem na izotop ^{208}Tl. Poločas rozpadu bismutu je $T_{\mathrm{Bi}} = 60{,}6\,\mathrm{min}$. Izotop polonia se dále rozpadá alfa rozpadem s poločasem rozpadu $T_{\mathrm{Po}} = 299\,\mathrm{ns}$ na stabilní izotop ^{208}Pb. Izotop thallia se rozpadá beta rozpadem s poločasem rozpadu $T_{\mathrm{Tl}} = 3{,}05\,\mathrm{min}$ taktéž na olovo ^{208}Pb.

Za jak dlouho naměří Jindra v systému největší aktivitu?

Jindra měřil poločas rozpadu ^{212}Po.

Pro účely řešení úlohy bude jednodušší pracovat s rozpadovými konstantami

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

než s poločasy rozpadu $T_{1/2}$. Rozpadové konstanty pro jednotlivé izotopy jsou

$$\lambda_{\mathrm{Bi}} = 1{,}91\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}},\quad \lambda_{\mathrm{Po}} = 2{,}32\cdot 10^{6}\,\mathrm{s^{-1}},\quad \lambda_{\mathrm{Tl}} = 3{,}79\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s^{-1}}.$$

Pro lepší přehlednost použijeme pro množství atomů bismutu proměnnou A, pro atomy polonia proměnnou B, pro atomy thallia proměnnou C a pro atomy olova proměnnou D. Celková aktivita R v systému závisí na aktuálních množstvích izotopů bismutu A, polonia B a thallia C

$$R = \lambda_{\mathrm{Bi}} A + \lambda_{\mathrm{Po}} B + \lambda_{\mathrm{Tl}} C. \tag{8}$$

Proto musíme vyřešit soustavu diferenciálních rovnic popisující rozpadovou řadu, abychom našli, jak se A, B a C vyvíjí v čase.

Soustava diferenciálních rovnic popisující množství jednotlivých izotopů v čase je

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\lambda_{\mathrm{Bi}} A,\\ \dot{B} &= P_\beta \lambda_{\mathrm{Bi}} A - \lambda_{\mathrm{Po}} B,\\ \dot{C} &= P_\alpha \lambda_{\mathrm{Bi}} A - \lambda_{\mathrm{Tl}} C,\\ \dot{D} &= \lambda_{\mathrm{Po}} B + \lambda_{\mathrm{Tl}} C,\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $A(0) = N_0, B(0) = 0, C(0) = 0, D(0) = 0$.

Tuto soustavu diferenciálních rovnic můžeme řešit svrchu řádek po řádku. První řádek rovnice má řešení

$$A(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t}.$$

To dosadíme do druhého řádku a budeme řešit diferenciální rovnici

$$\dot{B} = P_\beta \lambda_{\mathrm{Bi}} N_0 \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} - \lambda_{\mathrm{Po}} B$$

s počáteční podmínkou $B(0) = 0$. Řešením je funkce

$$B(t) = \frac{P_\beta \lambda_{\mathrm{Bi}} N_0}{\lambda_{\mathrm{Po}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \left(\mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} - \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Po}} t}\right)$$

Diferenciální rovnice na třetím řádku má stejnou strukturu jako rovnice na druhém řádku i stejnou počáteční podmínku, tudíž jejím řešením je

$$C(t) = \frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Bi}} N_0}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \left(\mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} - \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Tl}} t}\right)$$

Odvozené funkce dosadíme do rovnice (8) pro aktivitu

$$\begin{aligned}R(t) = \lambda_{\mathrm{Bi}} N_0 \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} + \frac{P_\beta \lambda_{\mathrm{Bi}} \lambda_{\mathrm{Po}} N_0}{\lambda_{\mathrm{Po}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \left(\mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} - \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Po}} t}\right) +\\ + \frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Bi}} \lambda_{\mathrm{Tl}} N_0}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \left(\mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} - \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Tl}} t}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

Ověříme, že v limitě $t \to \infty$ jde aktivita k nule $R \to 0$ díky klesajícím exponenciálám. To je v souladu s naším očekáváním, neboť za dlouhý čas se většina radioaktivních atomů rozpadne a zbudou jen stabilní ^{208}Pb.

Abychom našli maximum aktivity, musíme funkci (9) zderivovat

$$\begin{aligned}\dot{R} = \lambda_{\mathrm{Bi}} N_0 \Bigg(- \lambda_{\mathrm{Bi}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} - \frac{P_\beta \lambda_{\mathrm{Bi}} \lambda_{\mathrm{Po}}}{\lambda_{\mathrm{Po}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} + \frac{P_\beta \lambda_{\mathrm{Po}}^2}{\lambda_{\mathrm{Po}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Po}} t} -\\ - \frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Bi}} \lambda_{\mathrm{Tl}}}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} + \frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Tl}}^2}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Tl}} t} \Bigg).\end{aligned} \tag{10}$$

Podíváme se, že v čase $t = 0$ je změna aktivity v čase kladná

$$\dot{R}(0) = \lambda_{\mathrm{Bi}} N_0 \left(-\lambda_{\mathrm{Bi}} + P_\beta \lambda_{\mathrm{Po}} + P_\alpha \lambda_{\mathrm{Tl}}\right) > 0,$$

tudíž zpočátku rozpadová aktivita v systému roste. V určitý okamžik dosáhne maxima, a poté v limitě $t \to \infty$ aktivita klesne k nule.

Okamžik maximální aktivity určíme tak, že derivaci aktivity podle času (10) položíme rovnou nula a vyřešíme pro čas t. Vzhledem k faktu $\lambda_{\mathrm{Po}} \gg \lambda_{\mathrm{Tl}}$ a $\lambda_{\mathrm{Po}} \gg \lambda_{\mathrm{Bi}}$, můžeme v rovnici zanedbat člen s exponenciálou $\mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Po}} t}$

$$-\lambda_{\mathrm{Bi}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} - \frac{P_\beta \lambda_{\mathrm{Bi}} \lambda_{\mathrm{Po}}}{\lambda_{\mathrm{Po}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} - \frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Bi}} \lambda_{\mathrm{Tl}}}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Bi}} t} + \frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Tl}}^2}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Tl}} t} = 0$$

Postupně osamostatníme čas t

$$\mathrm{e}^{(\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}) t} = \frac{\frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Tl}}^2}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}}}{\lambda_{\mathrm{Bi}} + \frac{P_\beta \lambda_{\mathrm{Bi}} \lambda_{\mathrm{Po}}}{\lambda_{\mathrm{Po}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} + \frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Bi}} \lambda_{\mathrm{Tl}}}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}}} \approx \frac{\frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Tl}}^2}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}}}{\lambda_{\mathrm{Bi}} + P_\beta \lambda_{\mathrm{Bi}} + \frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Bi}} \lambda_{\mathrm{Tl}}}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}}}$$

$$t = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}} \ln \left(\frac{\frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Tl}}^2}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}}}{\lambda_{\mathrm{Bi}} + P_\beta \lambda_{\mathrm{Bi}} + \frac{P_\alpha \lambda_{\mathrm{Bi}} \lambda_{\mathrm{Tl}}}{\lambda_{\mathrm{Tl}} - \lambda_{\mathrm{Bi}}}} \right).$$

Po dosazení čísel vyjde čas maximální aktivity v systému $t = 366\,\mathrm{s} = 6{,}09\,\mathrm{min}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha 54 ... Mišo střílí

9 bodů

Mišo rád střílí z laseru. Potřebuje snížit jeho energii pomocí reflexivních šedých (neutral density, ND) filtrů. Chtěl by dosáhnout energie svazku 37 J*. Mišo má k dispozici 5 držáků na filtry a 7 různých filtrů, konkrétně 2-stop ND, 3-stop ND, 5-stop ND, 7-stop ND, 11-stop ND, 13-stop ND a 17-stop ND. Předpokládejte, že všechna energie dopadající na filtr se buď odrazí, a nebo projde. Laser má energii* 77 377 J*. S jakou nejlepší přesností dokáže dosáhnout chtěných* 37 J*? Výsledek uveďte v* mJ*.*

Mišo vypočítával fitrování na PALSu.

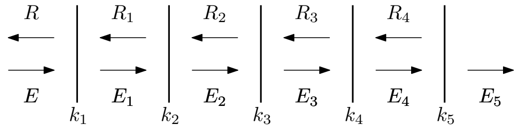
V priestoroch medzi filtrami bude dochádzať ku nekonečne veľa odrazom. Jednou z možností by bolo počítať nekonečné rady. Avšak nie je to potrebné. Bude nás zaujímať celkové množstvo energie, ktoré tečie v priestoroch medzi filtrami. Vstupujúcu energiu 77 377 J označme E a uvažujme, že laser svieti zľava. Na začiatok predpokladajme, že sme obsadili všetkých päť držiakov. Postupne zľava označme filtre indexmi 1 až 5. Rovnakými indexami označme energie E tečúce z daných filtrov smerom doprava a vracajúce sa energie R tečúce do daných filtrov z pravej strany. Výsledná energia vychádzajúca zo sústavy filtrov bude E_5.

Číslo n v označení ND filtru označuje koľko svetla cez daný filter prejde

$$E_{\mathrm{prejde}} = E_{\mathrm{vstupuje}} \cdot 2^{-n}\,.$$

Substituujme $k = 2^{-n}$, potom pre koeficient k dostávame možnosti

$$k = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, \frac{1}{2\,048}, \frac{1}{8\,192}, \frac{1}{131\,072} \right\}.$$



Obrázek 9: Energie v priestoroch medzi filtrami

Energia sa vo filtroch nestráca, takže platí

$$E_{\text{odrazí}} = E_{\text{vstupuje}} \cdot (1 - k_i) \quad , \quad E_{\text{odrazí}} + E_{\text{prejde}} = E_{\text{vstupuje}} \, .$$

Do držiakov umiestnime päť filtrov s koeficientami k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, ktorých hodnoty sú ľubovoľnou kombináciou z množiny k. Na rozhraniach budú platiť rovnice

$$\begin{aligned}
E_5 &= k_5 E_4 \, , \\
E_4 &= k_4 E_3 + (1 - k_4) R_4 \, , \\
E_3 &= k_3 E_2 + (1 - k_3) R_3 \, , \\
E_2 &= k_2 E_1 + (1 - k_2) R_2 \, , \\
E_1 &= k_1 E + (1 - k_1) R_1 \, , \\
R_4 &= (1 - k_5) E_4 \, , \\
R_3 &= (1 - k_4) E_3 + k_4 R_4 \, , \\
R_2 &= (1 - k_3) E_2 + k_3 R_3 \, , \\
R_1 &= (1 - k_2) E_1 + k_2 R_2 \, ,
\end{aligned}$$

kde E_i sú energie tečúce doprava a R_i energie tečúce doľava.

Dostali sme deväť rovníc o deviatich neznámych (5-krát E_i a 4-krát R_i), ktoré budeme riešiť zápisom do matice a Cramerovým pravidlom. Maticový zápis rovníc vyššie je nasledovný

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -k_4 & 0 & 0 & k_4 - 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -k_3 & 0 & 0 & k_3 - 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -k_2 & 0 & 0 & k_2 - 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_1 - 1 \\
0 & k_5 - 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & k_4 - 1 & 0 & 0 & -k_4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & k_3 - 1 & 0 & 0 & -k_3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & k_2 - 1 & 0 & 0 & -k_2 & 1
\end{pmatrix}}_{\text{Túto maticu označme } A}
\begin{pmatrix} E_5 \\ E_4 \\ E_3 \\ E_2 \\ E_1 \\ R_4 \\ R_3 \\ R_2 \\ R_1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_1 E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Pre Cramerovo pravidlo potrebujeme determinant matice A a determinant matice A_1 kde nahradíme prvý stĺpec vektorom na pravej strane rovnice. Prvý preto, lebo chceme určiť len E_5, čo je prvá neznáme v našom zoradení. Dostaneme

$$E_5 = \frac{\det A_1}{\det A} = E \cdot \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1 k_2 k_3 k_5 + k_1 k_2 k_4 k_5 + k_1 k_3 k_4 k_5 + k_2 k_3 k_4 k_5 - 4 k_1 k_2 k_3 k_4 k_5} \, ,$$

čo sa dá zjednodušiť na

$$E_5 = E \cdot \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} - 4} = \frac{1}{2^{n_1} + 2^{n_2} + 2^{n_3} + 2^{n_4} + 2^{n_5} - 4}\,,$$

kde n_i sú stop čísla ND filtrov.

Analogickým postupom pre $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ filtrov dostávame obecne

$$E_N = E \cdot \left(1 - N + \sum_{i=1}^{N} 2^{n_i}\right)^{-1}\,, \tag{11}$$

kde E_N je výsledná energia vystupujúca zo sústavy N filtrov. Tento vzťah pravdepodobne platí pre ľubovoľné N. Vidíme, že výsledná energia je nezávislá na poradí filtrov v držiakoch. Všetky permutácie pre danú kombináciu vychádzajú rovnako. Našim cieľom bude teraz nájsť kombináciu, ktorej energia bude podľa vzťahu (11) čo najbližšie ku 37 J.

Zo vzťahu (11) vyjadrime a vypočítajme sumu členov 2^{n_i}, položením $E_N = 37\,\mathrm{J}$, čo je požadovaná výstupná energia, ku ktorej sa chceme čo najviac priblížiť.

$$\sum_{i=1}^{N} 2^{n_i} = \frac{E}{E_N} + N - 1 \doteq 2090 + N\,. \tag{12}$$

Teraz môžeme skriptom prebehnúť všetky kombinácie a nájsť tú najlepšiu. Avšak k výsledku vieme dôjsť aj jednoduchou úvahou.

Na „vyskladanie“ čísla $2\,090 + N$ máme k dispozícii členy $2^{n_i} = 1/k_i$, teda 4, 8, 32, 128, 2 048, 8 192, 131 072. Určite teda musíme použiť číslo $2\,048 = 2^{11}$, čo je 11-stop filter. Vyššie ND filtre sú príliš silné. Zo sumy ostane $42 + N$, teda 128 je veľa, a využijeme až 5-stop filter, ktorému odpovedá $2^5 = 32$. Ostáva $10 + N$. Najlepšie čo môžeme urobiť je použiť zvyšné 2 filtre, ktoré sme ešte nevylúčili. Teda 2-stop ND a 3-stop ND, ktoré dokopy dávajú $2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12$. Použili sme 4 filtre, čo znamená, že $N = 4$. Na pravej strane rovnice (12) tým pádom dostaneme 2094, čo je takmer presne rovné sume na ľavej strane, ktorú sme načítali na $2\,048 + 32 + 8 + 4 = 2\,092$.

Na záver spočítame odchýlku ΔE energie E_N od 37 J využitím vzťahu (11) pre najlepšiu sadu filtrov, a to 2-stop ND, 3-stop ND, 5-stop ND a 11-stop ND,

$$\Delta E = 77\,377\,\mathrm{J} \cdot \left(1 - 4 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^{11}\right)^{-1} - 37\,\mathrm{J} \doteq 40\,\mathrm{mJ}$$

Radovan Lascsák
radovan.lascsak@fykos.cz

Úloha 55 ... červená středa 9 bodů

Lego se nachází na vesmírné stanici v hlubokém vesmíru. Aby se z toho nezbláznil, stále sleduje, jaký je zrovna den na Zemi. Takže ví, že minulou neděli vypustil (s nulovou počáteční rychlostí) raketu o klidové hmotnosti $m_0 = 31{,}0\,\mathrm{kg}$ *se speciálním iontovým pohonem, který nesnižuje klidovou hmotnost rakety, pouze působí konstantní silou* F*. Raketa svítí zlatým světlem* $\lambda_0 = 600\,\mathrm{nm}$ *tak, že když na ni Lego namíří svůj dalekohled dnes ve středu (konkrétně* $t_s = 72{,}0\,\mathrm{h}$ *od startu rakety), vidí červené světlo* $\lambda_r = 670\,\mathrm{nm}$*. Jaká je velikost síly* F*?*

Lego si všiml vzoru v termínu Fyziklání Online...

Červený posun je veľmi známy prípad Dopplerovho posunu. Konkrétne medzi vlnovou dĺžkou vyžarovaného svetla λ_0 a prijatou vlnovou dĺžkou λ_r je vzťah

$$\lambda_r = \lambda_0 \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} \,,$$

kde v je rýchlosť akou sa od seba zdroj a pozorovateľ vzďaľujú a c je rýchlosť svetla. Podiel v/c sa zvykne označovať ako β.

Keď tento vzťah umocníme na druhú a vyjadríme β, dostaneme

$$\beta = \frac{(\lambda_r/\lambda_0)^2 - 1}{(\lambda_r/\lambda_0)^2 + 1} \,,$$

čo nám po dosadení dáva rýchlosť vzďaľovania sa rakety od Legovej vesmírnej stanice $v = 0{,}1c$.

Teraz sa poďme povenovať tomu, ako bude raketa zrýchľovať. Berúc do úvahy, že bude musieť zrýchliť až na $v = 0{,}1c$, musíme použiť relativistické vzťahy pre zrýchlenie. Konkrétne priestorová zložka pohybovej rovnice vyzerá rovnako ako klasická $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\,\mathrm{d}t$, akurát $\vec{p} = m\vec{v}$, kde $\vec{v}$ je klasická rýchlosť voči danej inerciálnej vzťažnej sústave, ale m je hmotnosť relatívna voči tejto vzťažnej sústave, pre ktorú platí $m = m_0\gamma$, kde m_0 je kľudová hmotnosť (daná v zadaní) a $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ je Lorentzov faktor.

Ako inerciálnu vzťažnú sústavu, z pohľadu ktorej budeme úlohu riešiť, si zvolíme sústavu spojenú so stanicou na ktorej sa Lego nachádza. Všetky vzdialenosti, časy, rýchlosti budú uvádzané z pohľadu tejto sústavy.

Môžeme teraz zostaviť diferenciálnu rovnicu pre v a riešiť, ale jednoduchšie je uvedomiť si, že hybnosť v čase t bude jednoducho $p(t) = Ft$, čo nám dáva vzťah medzi t a β

$$Ft = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} v$$

$$\frac{Ft}{m_0 c} = \sqrt{\frac{\beta^2}{1 - \beta^2}}$$

$$\left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2 (1 - \beta^2) = \beta^2$$

$$\beta = \frac{Ft}{\sqrt{(m_0 c)^2 + (Ft)^2}} \,.$$

Keď do tohto vzťahu dosadíme β, ktorú sme spočítali z červeného posunu dostaneme

$$\frac{Ft}{\sqrt{(m_0 c)^2 + (Ft)^2}} = \frac{(\lambda_r/\lambda_0)^2 - 1}{(\lambda_r/\lambda_0)^2 + 1} \,.$$

Je dôležité si uvedomiť, že nám nestačí sem dosadiť čas t_s, nakoľko svetlo, ktoré Lego v stredu vidí, opustilo raketu skôr. Svetlo sa hýbe rýchlosťou c, čiže ak je raketa v nejaký moment (z pohľadu sústavy spojenej s Legovou stanicou) vzdialená o x od Lega, svetlo z nej dorazí k Legovi za čas $t_\mathrm{c} = x/c$. Čiže v čase $t = 0$ Lego vypustil raketu. Ona v čase $t = t_\mathrm{r}$ získa takú rýchlosť, že svetlo z nej Lego uvidí ako červené. Lenže toto svetlo Lego uvidí s oneskorením t_c. Čiže ak má Lego uvidieť danú vlnovú dĺžku v čase t_s, musí platiť $t_\mathrm{s} = t_\mathrm{r} + t_\mathrm{c}$.

Vyjadrime najprv t_r z rovnosti, ktorú sme získali porovnaním β

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{F t_\mathrm{r}}\right)^2 + 1}} = \frac{(\lambda_r/\lambda_0)^2 - 1}{(\lambda_r/\lambda_0)^2 + 1}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{m_0 c}{F t_\mathrm{r}}\right)^2 + 1} = \left(\frac{(\lambda_r/\lambda_0)^2 - 1}{(\lambda_r/\lambda_0)^2 + 1}\right)^2$$

$$\left(\frac{(\lambda_r/\lambda_0)^2 + 1}{(\lambda_r/\lambda_0)^2 - 1}\right)^2 - 1 = \left(\frac{m_0 c}{F t_\mathrm{r}}\right)^2$$

$$t_\mathrm{r} = \frac{m_0 c}{F}\frac{(\lambda_r/\lambda_0)^2 - 1}{2\lambda_r/\lambda_0}\,.$$

Následne spočítame vzdialenosť, ktorú za ten čas raketa prejde. Poznáme jej rýchlosť v čase t, zostáva ju preintegrovať od 0 po t_r

$$x_r = \int_0^{t_\mathrm{r}} \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{F t}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t = c\left[\sqrt{t^2 + \left(\frac{m_0 c}{F}\right)^2}\,\right]_0^{t_\mathrm{r}} = c\left(\sqrt{t_\mathrm{r}^2 + \left(\frac{m_0 c}{F}\right)^2} - \frac{m_0 c}{F}\right)\,.$$

Tým pádom, čas, za ktorý sa svetlo vráti bude

$$t_\mathrm{c} = \frac{x_r}{c} = \sqrt{t_\mathrm{r}^2 + \left(\frac{m_0 c}{F}\right)^2} - \frac{m_0 c}{F} = \frac{m_0 c}{F}\frac{(\lambda_r/\lambda_0)^2 + 1}{2\lambda_r/\lambda_0} - \frac{m_0 c}{F} = \frac{m_0 c}{F}\frac{(\lambda_r/\lambda_0 - 1)^2}{2\lambda_r/\lambda_0}\,.$$

A ako sme už povedali, musí platiť $t_\mathrm{s} = t_\mathrm{r} + t_\mathrm{c}$, čo nám konečne dáva rovnicu pre F

$$t_\mathrm{s} = \frac{m_0 c}{F}\frac{(\lambda_r/\lambda_0)^2 - 1}{2\lambda_r/\lambda_0} + \frac{m_0 c}{F}\frac{(\lambda_r/\lambda_0 - 1)^2}{2\lambda_r/\lambda_0}\,,$$

$$F = \frac{m_0 c}{t_\mathrm{s}}\left(\frac{(\lambda_r/\lambda_0)^2 - 1}{2\lambda_r/\lambda_0} + \frac{(\lambda_r/\lambda_0)^2 - 2\lambda_r/\lambda_0 + 1}{2\lambda_r/\lambda_0}\right)\,,$$

$$F = \frac{m_0 c}{t_\mathrm{s}}\left(\lambda_r/\lambda_0 - 1\right) = 4\,183\,\mathrm{N}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha 56 ... pumpujeme vodu vodou

8 bodů

V 19. století lidé začali hojně využívat parní stroje a uvažovat o jejich účinnosti. Jeden z problémů, který tehdy mohli řešit, bylo pumpování vody z dolu. Nezajímá nás ale konkrétní návrh procesu/motoru, který vodu z hloubky $h = 50\,\mathrm{m}$ vypumpuje až na povrch. Uvažujme, že jsme natrefili na geotermálně ohřátou ideální vodu (je nestlačitelná, má neměnnou hustotu ρ a měrnou tepelnou kapacitu c) s objemem $V_1 = 200\,\mathrm{m}^3$ a teplotou $T_1 = 90\,\mathrm{^\circ C}$. Poblíž je i jezero (termální lázeň) o konstantní teplotě $T_\mathrm{J} = 10\,\mathrm{^\circ C}$. Jaké je maximální množství vody, které jsme v ideálním případě schopni vypumpovat na povrch? Pro celé množství vody uvažujte konstantní převýšení h a homogenní gravitační pole. *Marek podnikl exkurzi do 19. století.*

Zo zadania vidíme, že ide o úlohu kedy máme dostupné určité množstvo energie (geotermálnu vodu), ktoré chceme „premeniť“ na určité množstvo práce (pumpovanie vody z bane). Nech budeme robiť čokoľvek, uvažujeme, že celková energia sa zachováva.

Nás však zaujíma maximálne množstvo vody, ktoré sme schopní vypumpovať a teda vlastne maximálne množstvo práce, ktorú sme schopní vykonať. Robme veci efektívne a uvažujme ideálny prípad, kedy sa geotermálna energia premieňa len na prácu a „odpadovú“ energiu, ktorá je prijímaná jazerom (termálnym kúpeľom o konštantnej teplote T_J). Na tomto mieste poznamenajme, že jazero pri tomto procese naozaj musí prijať určité množstvo tepla/energie a teda nemôžeme geotermálnu energiu premeniť čisto na prácu (to by bolo v rozpore s druhým termodynamickým zákonom). Píšme tak zákon zachovania energie

$$\Delta Q_\mathrm{geo} + \Delta Q_\mathrm{J} + W = 0\,, \tag{13}$$

kde ΔQ_geo značí zmenu tepla/energie geotermálnej vody, ΔQ_J značí teplo prijaté jazerom a W je nami hľadaná práca. Vidíme, že úloha sa vlastne redukuje na hľadanie a minimalizovanie práve tepla ΔQ_J, keďže ΔQ_geo je dané ako

$$\Delta Q_\mathrm{geo} = cV_1\rho\Delta T = cV_1\rho(T_\mathrm{J} - T_1)\,,$$

kedy teplotu na začiatku máme zadanú a teplota na konci je teplotou samotného jazera. Je to tak preto, lebo chceme maximálnu prácu a teda geotermálnu vodu budeme ochladzovať až dovtedy dokým efektívne vieme (do vyrovnania teplôt, potom by nás to už stálo prácu).

Vo vzťahu (13) nám ostali dve neznáme, potrebujeme tak ešte jednu väzbu. A tou je podmienka, že celý proces musí byť reverzibilný! Od Carnota vieme, že práve také procesy operujúce medzi dvoma teplotami sú najúčinnejšie – vedia extrahovať najviac práce. Zákon zachovania energie spolu s podmienkou reverzibility celého procesu je srdcom tzv. „Maximum work“ teorému. Platí druhý termodynamický zákon v tvare

$$\Delta S \ \geq 0\,,$$

respektíve, pre náš proces

$$\Delta S_\mathrm{geo} + \Delta S_\mathrm{J} + \Delta S_W \geq 0\,. \tag{14}$$

A keďže kúpeľ z definície (je omnoho väčší ako zdroj geotermálne ohriatej vody) prijíma teplo pri konštantnej teplote tak pre zmenu entropie platí

$$\Delta S_\mathrm{J} = \frac{\Delta Q_\mathrm{J}}{T_\mathrm{J}}\,,$$

a my už vieme, že ΔQ_J chceme minimalizovať. Vidíme tak že v rovnici (14) chceme uvažovať rovnosť (čo si je ľahšie uvedomiť ak na pravú stranu presunieme ostatné členy bez ΔQ_J) ak nás zaujíma maximálne množstvo práce. Ďalej si všimnime, že $\Delta S_W = 0$ nám pomáha v minimalizácii ΔQ_J a znamená to vlastne, že prácu konáme vratne/adiabaticky. Nakoniec naozaj dostávame podmienku na reverzibilný proces, kedy $\Delta S = 0$

$$\Delta S_\mathrm{J} = \frac{\Delta Q_\mathrm{J}}{T_\mathrm{J}} = -\Delta S_\mathrm{geo} = -\int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = -\int_{T_1}^{T_\mathrm{J}} c\rho V_1 \frac{\mathrm{d}T}{T}\,,$$

odkiaľ máme

$$\Delta Q_\mathrm{J} = -c\rho V_1 T_\mathrm{J} \ln\left(\frac{T_\mathrm{J}}{T_1}\right)\,.$$

Pre prácu z (13) potom platí

$$W = c\rho V_1 \left[T_1 - T_\mathrm{J} + T_\mathrm{J} \ln\left(\frac{T_\mathrm{J}}{T_1}\right)\right] ,$$

pričom vieme, že pri pumpovaní vody vykonávame prácu proti gravitačnému poľu $W = \rho \Delta V\, gh$ a pre maximálne množstvo vody V_max tak máme

$$V_\mathrm{max} = \frac{cV_1 \left[T_1 - T_\mathrm{J} + T_\mathrm{J} \ln\left(\frac{T_\mathrm{J}}{T_1}\right)\right]}{gh} .$$

To je pre hodnoty zo zadania $V_\mathrm{max} = 16\,277\,\mathrm{m^3}$. Nech robíme čo robíme, žiadny stroj viac vody pomocou energie z geotermálnej vody nevypumpuje. Ide však o pozoruhodne veľké množstvo vody. Uvedomme si, že na vypumpovanie $16\,277\,\mathrm{m^3}$ z hĺbky 50 metrov nám stačilo $200\,\mathrm{m^3}$ geotermálne ohriatej vody a kúpeľ. Dôvodom je samozrejme vysoká tepelná kapacita vody. Na záver ešte poznamenajme, že síce ide o veľa vody, ale stále omnoho menej ako by sme mohli naivne čakať z $V = cV_1 \Delta T/gh = 136\,481\,\mathrm{m^3}$.

Marek Jankola
marekj@fykos.cz

Úloha 57 ... pivní 9 bodů

Pít pivo, to není jen tak. Musíte zvednout svůj půllitr ze stolu a naklonit ho tak, aby vám začalo téct do pusy. K tomuto všemu je ale potřeba vykonat práci. Uvažujte hmotnost $m = 360\,\mathrm{g}$ *půllitru, jeho válcový tvar o poloměru* $r = 3{,}5\,\mathrm{cm}$ *a výšce* $h = 15\,\mathrm{cm}$ *a hustotu piva* $\rho = 1\,030\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Určete vykonanou práci, pokud zvedáte půllitr s* $350\,\mathrm{ml}$ *piva, abyste se mohli napít. Vaše ústa jsou* $40\,\mathrm{cm}$ *nad stolem.*

Jarda přemýšlel, kolik toho zase musí Viktorovi zaplatit...

Pro napití musíme vykonat práci potřebnou na zvednutí krýglu v tíhovém poli, tedy na zvýšení jeho potenciální energie. Pro začátek spočítáme úhel náklonu půllitru, aby z něj začalo téct pivo. Tekutina zaujme ve sklenici tvar, který se skládá z válce o výšce x a útvaru, jenž vznikne šikmým řezem válce z okraje jedné podstavy až na druhý. Uvažujme výšku tohoto útvaru jako y. Pak je celkový objem těchto dvou těles roven objemu piva ve sklenici V jako

$$V = \pi r^2 x + \frac{1}{2}\pi r^2 y .$$

Aby pivo začalo téct ven, musí být splněna podmínka $x + y = h$. Úhel náklonu navíc dokážeme vyjádřit jako $\mathrm{tg}\,\alpha = y/2r$, přičemž α je úhel, o který je výška půllitru odkloněna od svislice. Z těchto tří rovnic dostaneme hledaný úhel jako

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\pi r^2 h - V}{\pi r^3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 59{,}3\,^\circ .$$

Při tomto úhlu nastane situace, kdy je v krýglu stále tolik piva, že je jeho podstava zcela zalitá. Situace by se totiž změnila až při úhlu $\mathrm{arctg}(h/2r) = 65{,}0\,^\circ$.

Z předešlých vztahů navíc dokážeme vyjádřit číselně $y = 2r\,\mathrm{tg}\,\alpha = 11{,}81\,\mathrm{cm}$ a $x = 3{,}19\,\mathrm{cm}$.

Dále najdeme, v jaké výšce nade dnem prázdného půllitru je jeho těžiště. Protože je z homogenního materiálu o konstantní tloušťce stěn, můžeme označit plošnou hustotu pláště a podstavy jako σ. Těžiště podstavy je v nulové výšce nade dnem, těžiště pláště je ve výšce $h/2$, výška těžiště celého půllitru tak je

$$y_\mathrm{k} = \frac{\frac{h}{2} 2\pi r h \sigma}{2\pi r h \sigma + \pi r^2 \sigma} = \frac{h^2}{2h + r} = 6{,}72\,\mathrm{cm}\,.$$

Výpočet těžiště prostoru, který zaujímá pivo, bude náročnější. Získáme jej ze znalosti polohy těžiště válce, které leží $x/2$ nad podstavou, a z polohy těžiště druhé části útvaru, který tvoří pivo. Tu spočítáme pomocí integrálu jako

$$y_y = \frac{1}{\rho\left(\frac{1}{2}\pi r^2 y\right)} \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - u^2}\,(u + r)\,\frac{y}{2r}\rho\,(u + r)\,\frac{y}{4r}\,\mathrm{d}u \; = \frac{1}{(\pi r^3)}\frac{y}{2r}\frac{5\pi r^4}{8} = \frac{5y}{16} = 3{,}69\,\mathrm{cm}\,.$$

Výšku těžiště piva nad podstavou pak už jednoduše dostaneme jako

$$y_\mathrm{p} = \frac{1}{V}\left(\frac{x}{2}\pi r^2 x + \left(\frac{5y}{16} + x\right)\frac{1}{2}\pi r^2 y\right) = 5{,}03\,\mathrm{cm}\,.$$

Těžiště piva ovšem nebude na ose symetrie válce, nýbrž bude posunuté ve směru blíže k zemi. Analogicky spočítáme jeho vzdálenost od osy symetrie. Těžiště válcové části je na ose symetrie, těžiště druhé části je ve vzdálenosti

$$x_y = \frac{1}{\rho\left(\frac{1}{2}\pi r^2 y\right)} \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - u^2}\,(u + r)\,\frac{y}{2r}\rho u\;\,\mathrm{d}u \; = \frac{2}{\pi r^3}\frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{4}r = 0{,}875\,\mathrm{cm}\,.$$

Těžiště piva je tedy posunuto o

$$x_\mathrm{p} = \frac{1}{V}\frac{1}{2}\pi r^2 y \frac{1}{4} r = 0{,}568\,\mathrm{cm}$$

od osy symetrie půllitru.

Označme nyní $H = 40\,\mathrm{cm}$ výšku mezi stolem a ústy. Střed podstavy se bude při pití piva nacházet ve výšce

$$v_\mathrm{s} = H - h\cos\alpha + r\sin\alpha = 35{,}36\,\mathrm{cm}\,.$$

Těžiště samotného půllitru je pak o $y_\mathrm{k}\cos\alpha$ výše. Těžiště piva je výše o $y_\mathrm{p}\cos\alpha - x_\mathrm{p}\sin\alpha$. Potenciální energie nakloněného piva a půllitru je vzhledem k rovině stolu

$$E = g\left(m\left(v_\mathrm{s} + y_\mathrm{k}\cos\alpha\right) + V\;\rho\left(v_\mathrm{s} + y_\mathrm{p}\cos\alpha - x_\mathrm{p}\sin\alpha\right)\right) = 2{,}694\,\mathrm{J}\,.$$

Od této hodnoty je potřeba ještě odečíst potenciální energii, kterou má těžiště půllitru s pivem, pokud stojí na stole. Ta je

$$E_0 = gm\frac{h^2}{2h + r} + gV\rho\frac{V}{2\pi r^2} = 0{,}398\,\mathrm{J}\,.$$

Výsledkem je tedy vykonaná práce 2 296 mJ.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha K.1 ... kyvadlo se kýve tam... 3 body

V některých budovách se můžeme setkat s Foucaultovým kyvadlem, které mívá velmi dlouhý závěs. Jarda jednoho dne takové potkal, přičemž chtěl odhadnout výšku stropu, kde bylo kyvadlo zavěšené. Periodu kmitu změřil jako 14,2 s *a kyvadlo bylo v nejnižší poloze ve výšce* 70 cm *nad zemí. Najděte výšku stropu.* *Jarda byl v pařížském Pantheonu.*

V tomto řešení budeme kyvadlo považovat za matematické. Pro něj platí známý vztah spojující délku závěsu kyvadla L, tíhové zrychlení g a periodu kmitu T ve tvaru

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{T^2}{4\pi^2}g = 50{,}1\,\mathrm{m}\,.$$

Abychom našli výšku bodu nad zemí, ve které je kyvadlo ukotveno, je potřeba k délce závěsu přičíst ještě nejnižší výšku kyvadla nad zemí h. Pak dostáváme konečný výsledek ve tvaru

$$H = L + h = \frac{T^2}{4\pi^2}g + h = 50{,}8\,\mathrm{m}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha K.2 ... ...a zpět... 3 body

Abychom mohli počítat v aproximaci matematického kyvadla, potřebujeme hmotný bod na nehmotném závěsu. Uvažujme ocelové lanko o průměru 1,4 mm*, na kterém je zavěšeno závaží. Pro něj v rámci dobré přesnosti požadujeme, aby bylo* 80*-krát hmotnější než lanko, na kterém visí. Jestliže je pevnost použité oceli v tahu* $520\,\mathrm{N{\cdot}mm^{-2}}$*, jaká může být maximální délka závěsu v klidu? Hustota použité oceli je* $7\,900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*.*

Tak tenké a dlouhé lanko a stejně by udrželo i Jardu.

Nejvyšší napětí v lanku bude v bodě závěsu, protože zde nese tíhu závaží i zbytku lana. Hmotnost lanka bude

$$m_\mathrm{l} = \frac{\pi d^2}{4}\rho L\,,$$

kde d je jeho průměr, ρ hustota oceli a L jeho délka. Pro hmotnost závaží pak platí $m_\mathrm{z} = km_\mathrm{l}$, kde $k = 80$.

Síla působící na lanko v místě závěsu tak je

$$F = (m_\mathrm{l} + m_\mathrm{z})\,g = m_\mathrm{l}\,(1+k)\,g = \frac{\pi d^2}{4}\rho L\,(1+k)\,g\,.$$

Vydělíme-li tuto sílu plochou průřezu lanka, dostaneme napětí v materiálu. Lanko se nesmí přetrhnout, proto platí

$$\sigma = \frac{F}{S} = \rho L\,(1+k)\,g \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\sigma}{\rho g\,(1+k)} \doteq 83\,\mathrm{m}\,,$$

kde σ je mez pevnosti v tahu.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha K.3 ... ...a tam... 4 body

Vodorovná výchylka kyvadla se během deseti minut zmenšila z 1,0 m *na* 0,9 m*. Určete průměrnou práci, kterou vykonají odporové síly v průběhu jedné periody kyvadla. Uvažujte znovu pouze matematické kyvadlo o hmotnosti* 47 kg *s periodou kmitu* 14,2 s.

Jirkovi přišlo zadání této úlohy matoucí.

Důležité je, že perioda kmitu nezávisí na výchylce kyvadla. To za čas $t = 10\,\mathrm{min}$ udělalo

$$N = \frac{t}{T} = 42{,}3\,.$$

kmitů. Dále pak víme, že lze délku kyvadla jednoduše spočítat z periody kmitu jako

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 50{,}2\,\mathrm{m}\,.$$

Kyvadlo ztratilo nějakou energii, kterou vypočítáme z rozdílu potenciálních energií. Ze znalosti výchylky $x = L\sin\varphi$, kde φ je úhel vychýlení od kolmice, můžeme spočítat úbytek potenciální energie kyvadla jako

$$\Delta E = mgL\left(\cos\varphi_\mathrm{f} - \cos\varphi_\mathrm{i}\right)\,.$$

Indexem i budeme značit počáteční úhlovou výchylku a indexem f pak koncovou. Protože pro počáteční úhel platí $\varphi_\mathrm{i} = \mathrm{arctg}\left(\frac{x_\mathrm{i}}{L}\right) \doteq 0{,}020\,\mathrm{rad} \ll 1$, můžeme s dobrou přesností používat aproximace $\mathrm{tg}\,\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$ a $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Rozdíl potenciálních energií tak můžeme zapsat jako

$$\Delta E = \frac{mgL}{2}\left(\varphi_\mathrm{i}^2 - \varphi_\mathrm{f}^2\right) = \frac{mg}{2L}\left(x_\mathrm{i}^2 - x_\mathrm{f}^2\right)\,.$$

Tato energie je rovna práci vykonané odporovými silami. Průměrně během jedné periody tak kyvadlo ztratí energii

$$P = \frac{\Delta E}{N} = \frac{mg\left(x_\mathrm{i}^2 - x_\mathrm{f}^2\right)T}{2Lt}\,.$$

Ještě ze znalosti periody kmitu dosaďme za délku lana $L = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$ a dostáváme

$$P = \frac{\Delta E}{N} = 2\pi^2\frac{m\left(x_\mathrm{i}^2 - x_\mathrm{f}^2\right)}{Tt} \doteq 21\,\mathrm{mJ}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha K.4 ... ...a zpět a pořád dokola 5 bodů

Jardovi se odhad nezdál dostatečně přesný, proto se rozhodl nebrat kyvadlo jako matematické, ale chtěl započítat momenty setrvačnosti jednotlivých částí. Zjistil si, že lanko je tvořeno 50,0 m *dlouhým ocelovým drátem o průměru* 1,40 mm *a na konci je koule o poloměru* 10,0 cm *o hmotnosti* 17,0 kg*. Jaký je poměr doby kmitu takového kyvadla vůči periodě matematického o délce závěsu* 50,1 m*? Hustota oceli je* $7{,}90\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$.

Jarda potřeboval zadat úlohu s fyzickým kyvadlem i do letošního Hurry-upu.

Periodu spočítáme pomocí vztahu pro fyzické kyvadlo, kterým je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}}\,,$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení, m je jeho hmotnost, g tíhové zrychlení a x je vzdálenost těžiště tělesa od osy otáčení.

Hmotnost drátu je $m_\mathrm{d} = \rho V = \rho\frac{\pi d^2}{4}l$, kde hustota oceli je rovna $\rho = 7\,900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Objem drátu jsme označili jako V a následně jej vyjádřili pomocí průměru d a délky l. Vzdálenost těžiště od osy otáčení tak činí

$$x = \frac{m_\mathrm{d}\frac{l}{2} + M\left(l+R\right)}{m_\mathrm{d}+M} = \frac{\rho\frac{\pi d^2}{8}l^2 + M\left(l+R\right)}{m_\mathrm{d}+M}\,,$$

kde M je hmotnost koule na konci a R její poloměr.

Moment setrvačnost celého tělesa získáme součtem jeho jednotlivých částí. Lanko můžeme považovat za tenkou tuhou tyč, která se otáčí kolem jednoho svého konce, což odpovídá momentu setrvačnosti

$$J_\mathrm{d} = \frac{1}{3}m_\mathrm{d}l^3 = \frac{1}{12}\rho\pi d^2 l^3\,.$$

Moment setrvačnost koule vůči ose procházející jejím těžištěm je $\frac{2}{5}MR^2$, v této situaci ale osu musíme posunout podle Steinerovy věty o $M\left(l+R\right)^2$ a získáme celkový moment setrvačnosti celého kyvadla jako

$$J = \frac{1}{12}\rho\pi d^2 l^3 + \frac{2}{5}MR^2 + M\left(l+R\right)^2\,.$$

Dosazením do úvodního vztahu a porovnáním s periodou matematického kyvadla o délce závěsu $(l+R)$ dostaneme

$$\frac{T}{T_\mathrm{mat}} = \sqrt{\frac{J}{\left(m_\mathrm{d}+M\right)\left(l+R\right)x}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\frac{1}{12}\rho\pi d^2l^3+\frac{2}{5}MR^2}{M(l+R)^2}}{1+\frac{\rho\frac{\pi d^2}{8}l^2}{M(l+R)}}} \doteq 0{,}997\,.$$

Rozdíl je tak malý, že i pro tak dlouhou periodu kmitu by ho nebylo pomocí stopek snadné naměřit.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha T.1 ... nafukujeme balónek 4 body

Při nafukování balónku můžeme od jistého poloměru s dobrou přesností předpokládat, že energie pružnosti roste přímo úměrně s přibývající plochou povrchu balónku. V této oblasti rozměrů našel Jirka balónek o poloměru 5 cm *a změřil, že tlak vzduchu v něm je roven* 107 kPa*. Balónek však nebyl moc velký, proto se jej rozhodl dofouknout na poloměr* 15 cm*. Kolik molů vzduchu musel do balónku přifouknout? Předpokládejte, že má balónek kulový tvar. Teplota v místnosti, kde Jirka balónek nafukuje, je* $T = 20\,\mathrm{^\circ C}$*.* *Cvičení z optiky bylo pro Jirku moc nezáživné.*

K výpočtu množství vzduchu, které musíme dofouknout, chceme využít stavovou rovnici pro ideální plyn

$$pV = nRT\,.$$

Přitom pro nafouknutý balónek známe teplotu $T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ i objem $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$, kde $r_2 = 15\,\mathrm{cm}$ (balónek je kulový). Musíme tedy nalézt závislost tlaku uvnitř balónku na jeho rozměrech.

Víme, že abychom zvětšili plochu balónku o $\mathrm{d}S$ (uvažujeme, že $\mathrm{d}S$ je infinitezimálně malá plocha, i když by vztah pro práci platil i pro konečnou ΔS), musíme proti silám v balónku vykonat práci $\mathrm{d}W$ takovou, že platí

$$\mathrm{d}W = \frac{A}{2} \cdot \mathrm{d}S\,.$$

kde konstantu úměrnosti jsme označili $\frac{A}{2}$ pro účely konzistentního značení s dalšími úlohami v této Hurry up sérii.

Balónek má kulový tvar, výslednice sil v balónku proto působí směrem ke středu balónku (balónek se snaží zmenšit). Při zvětšení balónku o malý poloměr $\mathrm{d}r$ se pak vykoná práce

$$\mathrm{d}W = F \cdot \mathrm{d}r = p \cdot S \cdot \mathrm{d}r = p \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,,$$

kde p je tlak způsobený balónkem při poloměru r. Při úpravách jsme využili toho, že je $\mathrm{d}r$ je malé, takže se při nafouknutí o Δr síla F a plocha S změní zanedbatelně málo (tj. zanedbáme členy $O(\mathrm{d}r^2)$). Ekvivalentně bychom mohli postupovat tak, že si řekneme, že tlak v balónku koná stejnou práci při nafouknutí, jako koná tlak plynu při jeho rozpínání. Když se plyn rozepne o objem $\mathrm{d}V$, vykoná práci $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V$, odkud máme opět $\mathrm{d}W = p \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$.

O práci zároveň již víme, že je úměrná ploše $\mathrm{d}S = 8\pi r^2\,\mathrm{d}r$, takže celkem můžeme psát

$$p \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{A}{2} \cdot 8\pi r^2\,\mathrm{d}r\,,$$

odkud máme závislost tlaku na poloměru

$$p = \frac{A}{r}\,.$$

Uvědomme si, že toto ještě není tlak vzduchu uvnitř balónku. Na vzduch totiž kromě balónku působí ještě atmosférický tlak $p_\mathrm{a} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$. Celkový tlak vzduchu je potom $p + p_\mathrm{a}$.

Ze zadání známe počáteční tlak p_1 a poloměr r_1, odtud určíme konstantu A jako $A = (p_1 - p_\mathrm{a})r_1$. Pak pro počet molů vzduchu, které musí Jirka do balónku dofouknout, dostáváme

$$\Delta n = \frac{p_2V_2}{RT} - \frac{p_1V_1}{RT} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta n = \frac{4\pi}{3RT}\left[\left(p_\mathrm{a} + (p_1 - p_\mathrm{a})\frac{r_1}{r_2}\right) r_2^3 - p_1 r_1^3\right]\,.$$

Dosazením získáváme $\Delta n = 0{,}576\,\mathrm{mol}$, což odpovídá přibližně 13 litrům vzduchu za normálního tlaku. Člověk při nádechu zvládne vyfouknout kolem 3 litrů vzduchu, takže Jirka potřebuje přibližně 5 nádechů na dofouknutí balónku.

Jiří Kohl
`jiri.kohl@fykos.cz`

Úloha T.2 ... ochlazujeme balónek

5 bodů

Jirka už byl spokojený s velikostí svého balónku a vyrazil s ním ven na procházku. Z vyhřáté místnosti o 20 °C *vyšel ven jen v tričku a zjistil, že je mu vážně zima, protože teplota venku byla jen* 3 °C. *Na jaký poloměr se zmenšil jeho balónek během procházky, pokud měl na začátku poloměr* $r_1 = 15\,\mathrm{cm}$? *Nezapomeňte, že pro závislost mezi přetlakem v balónku a jeho poloměrem jste v minulé úloze odvodili vztah (stále uvažujeme, že má balónek kulový tvar)*

$$\Delta p = \frac{A}{r}\,,$$

kde $A = 300\,\mathrm{Pa{\cdot}m}$.

Jirka chodí na tajné noční schůzky.

Vyjdeme ze stavové rovnice pro ideální plyn. Uvažujeme, že vzduch z balónku v průběhu procházky neuniká, takže máme

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}\,,$$

kde $T_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$, $T_2 = 3\,^\circ\mathrm{C}$. Balónek je kulový, takže jeho objem je

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Tlak vzduchu v balónku je roven součtu atmosférického tlaku p_a a přetlaku v balónku. Máme tedy

$$p = p_\mathrm{a} + \frac{A}{r}\,.$$

Všechny poznatky nyní dosadíme do stavové rovnice, čímž po úpravách dostaneme

$$\frac{T_2}{T_1}\left(p_\mathrm{a} + \frac{A}{r_1}\right) r_1^3 = A r_2^2 + p_\mathrm{a} r_2^3\,.$$

Jelikož se jedná kubickou rovnici, spokojíme se s numerickým řešením. Jediný reálný kořen je $r_2 \doteq 14{,}7\,\mathrm{cm}$. Povšimněme si, že v tomto případě změna tlaku v balónku ovlivňuje výsledek velmi málo. Pokud bychom uvažovali v balónku konstantní tlak, dostali bychom výsledek, který by se lišil řádově o setiny procenta. Dostaneme tedy

$$r_2 \approx r_1 \sqrt[3]{\frac{T_2}{T_1}} \doteq 14{,}7\,\mathrm{cm}\,.$$

Jiří Kohl
`jiri.kohl@fykos.cz`

Úloha T.3 ... uletěl nám balónek

6 bodů

Viktor Jirkovi za jeho obětavost při korekturování věnoval malý dárek – heliový balónek o poloměru $r_0 = 11\,\mathrm{cm}$. *Jirka zatížil balónek tak, že celková hmotnost materiálu byla* $M = 5{,}2\,\mathrm{g}$, *a doufal, že to stačí, aby balónek neuletěl. Bohužel se spletl a balónek začal stoupat vzhůru. Uvažujeme-li stejnou závislost mezi poloměrem a tlakem uvnitř balónku jako v předchozích úlohách, tedy*

$$\Delta p = \frac{A}{r}\,,$$

kde $A = 300\,\mathrm{Pa{\cdot}m}$*, určete, do jaké výšky by balónek vystoupal v izotermické atmosféře o teplotě* $T = 20\,\mathrm{^\circ C}$*, kdyby neprasknul. Molární hmotnost helia je* $4{,}003\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$*.*

Nápověda: *V izotermické atmosféře klesá tlak i hustota exponenciálně.*

Ve skutečnosti pozval Jarda Jirku na pivo.

Izotermická atmosféra má všude konstatní teplotu a pro její tlak p_a a hustotu ρ_a platí

$$p_\mathrm{a} = p_\mathrm{a0} \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right), \rho_\mathrm{a} = \rho_\mathrm{a0} \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right),$$

kde p_a0, resp. ρ_a0 je tlak, resp. hustota u země a $h_0 = \frac{RT}{gM_\mathrm{v}} = 8600\,\mathrm{m}$ je výška ($M_\mathrm{v} = 28{,}96\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$), kde tlak i hustota klesnou na $1/\mathrm{e}$ hodnoty u země. Doplňme ještě, že mezi tlakem a hustotou platí vztah

$$\frac{p_\mathrm{a}}{\rho_\mathrm{a}} = \frac{RT}{M_\mathrm{m}},$$

kde T je teplota plynu a M_m jeho molární hmotnost.

Další vztah, který nás bude po zbytek úlohy provázet, je vztah pro tlak p_i hélia uvnitř balónku

$$p_\mathrm{i} - p_\mathrm{a} = \frac{A}{r}.$$

Za normálních podmínek proto můžeme jednoduše určit hustotu helia jako

$$\rho_\mathrm{He0} = \frac{p_\mathrm{a0} M_\mathrm{He}}{RT} = 0{,}1664\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}},$$

kde $M_\mathrm{He} = 4{,}003\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ je molární hmotnost helia. Hustota helia uvnitř balónku bude o něco vyšší, protože je zde o $\frac{A}{r_0}$ vyšší tlak, tedy

$$\rho_\mathrm{He} = \rho_\mathrm{He0} \frac{p_\mathrm{a0} + A/r_0}{p_\mathrm{a0}} = 0{,}1709\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}.$$

Aby se balónek vznášel v nějaké výšce, musí být jeho tíhová síla rovna vztlakové

$$mg = V\rho_\mathrm{a} g \quad \Rightarrow \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\mathrm{a}.$$

Víme, že u země byla vztlaková síla větší než tíhová, proto jsme balónek zatížili.

Můžeme najít hmotnost balónku a plynu v něm jako

$$m = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_\mathrm{He} + M = 6{,}153\,\mathrm{g}.$$

Poslední důležitou rovnicí je stavová rovnice ideálního plynu v balónku, podle které

$$p_\mathrm{i} \frac{4}{3}\pi r^3 = nRT.$$

Z této rovnice jednoduše dosadíme do rovnice pro tlak a vyjádříme atmosférický tlak v závislosti na poloměru jako

$$\frac{3nRT}{4\pi r^3} - \frac{A}{r} = p_\mathrm{a0} \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right).$$

Exponenciálu dosadíme do rovnice pro síly

$$\exp\left(-\frac{h}{h_0}\right) = \frac{\rho_\mathrm{a}}{\rho_{\mathrm{a}0}} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\mathrm{a}0}}\,,$$

a dostáváme rovnici pro r ve tvaru

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho_{\mathrm{a}0}}{p_{\mathrm{a}0}}\left(\frac{3nRT}{4\pi r^3} - \frac{A}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{3}{4\pi A}\left(nRT - \frac{mp_{\mathrm{a}0}}{\rho_{\mathrm{a}0}}\right)}\,.$$

Protože je teplota a molární množství helia v balónku konstantní, můžeme pro součin nRT psát

$$nRT = p_{\mathrm{i}0}\frac{4}{3}\pi r_0^3 = \left(\frac{A}{r_0} + p_{\mathrm{a}0}\right)\frac{4}{3}\pi r_0^3$$

a dosadit do předchozí rovnice.

Dosadíme poloměr do rovnice pro síly a po několika dalších úpravách a dosazeních můžeme najít výšku h jako

$$h = h_0 \ln\left(\frac{\rho_{\mathrm{a}0}}{\rho_\mathrm{a}}\right) = h_0 \ln\left(\frac{4\pi r^3 \rho_{a0}}{3m}\right) = h_0 \ln\left(\frac{4\pi\left(\sqrt{r_0^2 + \frac{r_0^3 p_{\mathrm{a}0}}{A} - \frac{3mp_{\mathrm{a}0}}{4\pi A\rho_{\mathrm{a}0}}}\right)^3 \rho_{a0}}{3m}\right) \doteq 19\,\mathrm{km}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha T.4 ... spojujeme balónky 6 bodů

Protože Jirkovi heliový balónek uletěl, smutně musel Viktora požádat o další. Dostal rovnou dva, ale musel si je nafouknout sám. Jirka nafouknul jeden na poloměr $r_i = 15{,}0\,\mathrm{cm}$, poté vzal krátkou úzkou trubičku a propojil ho s druhým tak, že žádný vzduch neuniknul. K jeho velkému překvapení měl po ustálení rovnováhy jeden balónek větší poloměr než ten druhý. Jaký byl poměr poloměru většího balónku ku poloměru menšího? Nyní předpokládejte, že rozdíl tlaků v balónku a v okolí závisí na jeho poloměru jako

$$\Delta p = \frac{A}{r}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right]\,,$$

kde $A = 300\,\mathrm{Pa{\cdot}m}$ a $r_0 = 3{,}00\,\mathrm{cm}$. Celý experiment proběhl za teploty $20\,^\circ\mathrm{C}$. Předpokládejte, že druhý balónek má před připojením k trubičce poloměr r_0.

Jarda viděl zajímavý experiment na přednášce.

Situace se ustálí, jakmile se mezi balónky vyrovnají tlaky, přičemž zůstane celkové molární množství plynu v soustavě zachované. Ze znalosti vztahu pro tlak v závislosti na poloměru dokážeme pomocí stavové rovnice určit molární množství plynu v soustavě jako

$$n_1 = \frac{1}{RT}p\frac{4}{3}\pi r_i^3 = \frac{1}{RT}\left\{\frac{A}{r_i}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^6\right] + p_\mathrm{a}\right\}\frac{4}{3}\pi r_i^3 \doteq 0{,}599\,\mathrm{mol}\,,$$

$$n_2 = \frac{1}{RT}p_\mathrm{a}\frac{4}{3}\pi r_0^3 \doteq 0{,}005\,\mathrm{mol}\,.$$

Označme r_1 poloměr původního ze spojených balónků a r_2 poloměr druhého. Při rovnosti tlaků platí

$$\frac{1}{r_1}\left[1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6\right]=\frac{1}{r_2}\left[1-\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^6\right].$$

Z této rovnice dokážeme pomocí jednoho poloměru vždy dopočítat druhý.

Zároveň musí platit stavová rovnice pro celou soustavu ve tvaru

$$p\frac{4\pi}{3}\left(r_1^3+r_2^3\right)=\left\{\frac{A}{r_1}\left[1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6\right]+p_\mathrm{a}\right\}\frac{4\pi}{3}\left(r_1^3+r_2^3\right)=(n_1+n_2)RT\doteq 1472{,}18\,\mathrm{J}\,,$$

Hodnotu pravé strany rovnice známe, jedinou proměnnou na levé straně je r_1. Budeme tedy měnit r_1 tak dlouho, dokud nedostaneme rovnost mezi oběma stranami na požadovanou přesnost. Můžeme k tomu využít třeba software typu Wolfram Mathematica nebo vhodný grafický kalkulátor, například GeoGebru. Vyneseme si závislost přetlaku na poloměru, na něj umístíme jeden bod, najdeme druhý, který má stejný přetlak a je tedy na průsečíku křivky přetlaku s rovnoběžkou s x osou, čímž známe r_1 a r_2. Zjistili jsme, že aby se pravá strana rovnala nRT, potřebujeme $r_1 = 14{,}994\,\mathrm{cm}$ a $r_2 = 3{,}119\,\mathrm{cm}$. Jejich poměr a tedy řešení naší úlohy je 4,81.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha M.1 ... tramvajová 3 body

Jaký je maximální úhel, pod kterým může jet tramvaj z kopce dolů, aby stále byla schopna zastavit? Součinitel smykového tření kol a kolejnic je $f = 0{,}15$.

David jel na přednášku podezřele z kopce.

Jestliže se tramvaj nachází na nakloněné rovině svírající úhel α se zemí, působí na ni tři síly: tíhová síla F svisle dolů, normálová síla $N = F\cos\alpha$ kolmá na nakloněnou rovinu a třecí síla F_t působící proti směru pohybu. Maximální možná hodnota třecí síly je

$$F_{\mathrm{t,\,max}} = fN = fF\cos\alpha\,,$$

kde $f = 0{,}15$ je součinitel smykového tření mezi koly tramvaje a kolejnicemi. Toto je zároveň maximální brzdná síla, kterou může tramvaj vyvinout.

Směrem dolů z kopce působí tečná složka tíhové síly

$$F_{\parallel} = F\sin\alpha\,,$$

která se snaží tramvaj rozjet. Tramvaj bude schopná zastavit jen v případě, že její brzdná síla bude větší než urychlující tečná složka tíhové síly. Dostáváme nerovnici s těmito dvěma silami

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{t,\,max}} &> F_{\parallel}\\ fF\cos\alpha &> F\sin\alpha\\ \mathrm{tg}\,\alpha &< f\\ \alpha &< \mathrm{arctg}\,f\\ \alpha &< 8{,}53^\circ \doteq 8{,}5^\circ\,.\end{aligned}$$

Tramvaj dokáže bezpečně zastavit jen na svazích se sklonem menším než $8{,}5^\circ$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha M.2 ... tramvajová reloaded

3 body

Tramvaj jede rychlostí $v = 27\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a její maximální zpomalení je $a = 2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaká je minimální vzdálenost, na které tramvaj ještě stihne zastavit, když dá David na zastávce znamení? Uvažujte, že reakční doba řidiče na Davidovo mávnutí je $t' = 0{,}3\,\mathrm{s}$

David studoval manuál k travaji T3 až moc dlouho.

Nejprve vypočítáme dráhu, kterou tramvaj ujede ještě předtím, než řidič na Davida zareaguje, jako

$$s_1 = vt' = 2{,}25\,\mathrm{m}\,.$$

Následně spočítáme, jak dlouho bude trvat, než tramvaj zastaví

$$v = at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{a} \doteq 3{,}57\,\mathrm{s}\,.$$

Potom určíme brzdnou dráhu pomocí známého vzorce

$$s_2 = vt - \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 \doteq 13{,}39\,\mathrm{m}.$$

Nakonec sečteme obě dráhy

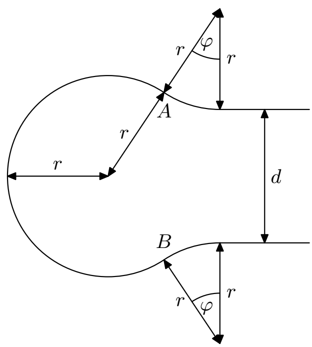
$$s = s_1 + s_2 \doteq 16\,\mathrm{m}\,.$$

David Škrob
`david.skrob@fykos.cz`

Úloha M.3 ... paralelní koleje

4 body

Mějme dvoje paralelní tramvajové koleje ve vzdálenosti $d = 11\,\mathrm{m}$. Chceme mezi nimi postavit soustavu oblouků o poloměru r, viz obrázek vpravo. Najděte r takové, aby tramvaj, která v zatáčce snese normálové zrychlení $a = 0{,}85\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, projela touto zatáčkou v co nejkratším čase. Velikost rychlosti tramvaje se nemění. *Adam by chtěl jet Snowpiercerem.*



Očividně mají smysl pouze $r \geq d/2$. Zvolme si tedy libovolné r splňující tuto podmínku a vypočtěme k němu celkovou délku oblouků $s(r)$ a maximální možnou rychlost lokomotivy $v(r)$.

Rychlost je mnohem jednodušší a tak začneme s ní. Protože $a \leq v^2/r$ platí

$$v = \sqrt{ar}\,.$$

Pro výpočet funkce $s(r)$ nejprve zjistíme středový úhel příslušící prostřednímu oblouku. Pro ten platí $\alpha = \pi + 2\varphi$. Následně vyjádříme dvěma způsoby vzdálenost A, B. Pomocí velkého oblouku jako

$$2r \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 2r\cos\varphi$$

a pomocí malých oblouků jako

$$d + 2r(1 - \cos\varphi)\,.$$

Tato dvě vyjádření porovnáme a získáme vztah $\varphi = \arccos\left[(d+2r)/4r\right]$. Nakonec stačí pouze sečíst jednotlivé oblouky a získat

$$s(t) = \pi r + 4r \arccos\left(\frac{d+2r}{4r}\right).$$

Ze známých funkcí $s(r)$ a $v(r)$ vyjádříme čas jako funkci r

$$t(r) = \frac{s(r)}{v(r)} = \pi\sqrt{\frac{r}{a}} + 4\sqrt{\frac{r}{a}} \arccos\left(\frac{d+2r}{4r}\right) \leq \pi\sqrt{\frac{r}{a}}\,.$$

Funkce $f(r) = \pi\sqrt{r/a}$ je rostoucí a tramvaj tak oblouk projede nejrychleji v případě, kdy $r = d/2 = 5{,}5\,\mathrm{m}$.
Poznámka: Vlastně ani nebylo třeba vyjadřovat úhel φ (stačí, že je nezáporný), ale je to zajímavý geometrický problém.

Adam Mendl
adam.mendl@fykos.cz

Úloha M.4 ... turbomuší trable 5 bodů

Dvě tramvaje ve vzdálenosti $s = 400\,\mathrm{m}$ jedou proti sobě, první rychlostí $v_1 = 30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, druhá rychlostí $v_2 = 35\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Z první vylétne moucha rychlostí $v_3 = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a doletí ke druhé tramvaji, zde se odrazí od skla a letí zpátky a tak dál, dokud bude tramvajím zvládat uletět. Skla jsou totiž ulepená, a tak se při každém odrazu její rychlost sníží na q-násobek rychlosti před odrazem, kde $q = 0{,}97$. Za předpokladu, že se odrazí okamžitě, kolik toho uletí, než se tramvaje srazí? *Marek potkal mouchu v tramvaji.*

Po čase t od momentu, kdy moucha vyletí, mají tramvaje vzdálenosti $s - (v_1 + v_2)t$. Označíme čas i-té srážky s tramvajemi jako t_i (a položme $t_0 = 0\,\mathrm{s}$). Dále označme $v_1 = 30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ rychlost první tramvaje a v_2 rychlost druhé, zatímco počáteční rychlost mouchy jako v_3. Potom můžeme pro sudé a liché srážky psát

$$\begin{aligned} s - (v_1 + v_2)t_{2n} &= \left(v_2 + v_3 \cdot q^{2n}\right)\left(t_{2n+1} - t_{2n}\right), \\ s - (v_1 + v_2)t_{2n+1} &= \left(v_1 + v_3 \cdot q^{2n+1}\right)\left(t_{2n+2} - t_{2n+1}\right), \end{aligned}$$

neboť moucha a protijedoucí tramvaj musí urazit vzdálenost mezi tramvajemi za stejný čas. Úpravou dostaneme iterativní vztahy

$$\begin{aligned} t_{2n+1} &= \frac{s - \left(v_1 - v_3 \cdot q^{2n}\right) t_{2n}}{v_2 + v_3 \cdot q^{2n}}\,, \\ t_{2n+2} &= \frac{s - \left(v_2 - v_3 \cdot q^{2n+1}\right) t_{2n+1}}{v_1 + v_3 \cdot q^{2n+1}}\,. \end{aligned}$$

Můžeme si uvědomit, že kdyby moucha nezpomalovala, nastalo by formálně nekonečno srážek s tramvajemi, ale tím, že moucha zpomaluje, v jednu chvíli bude mít rychlost menší než jedna z tramvají a potom se už jen poveze na čelním skle. Proto najdeme nejmenší takové k, pro které bude platit jedna z nerovností

$$v_3 q^{2k} \leq v_1\,, \quad v_3 q^{2k+1} \leq v_2\,,$$

a určíme počet srážek mouchy s tramvajemi N jako $2k$ v případě platnosti první nerovnosti nebo $2k+1$ v případě platnosti druhé. Toto k lze určit například pomocí libovolného tabulkového procesoru typu Excel. Jakmile jej určíme, celkovou dráhu mouchy spočteme jako

$$s = \sum_{n=1}^{N} v_3 q^{n-1} (t_n - t_{n-1}) \,,$$

což můžeme opět řešit tabulkovým procesorem. Po provedení výpočtů dostaneme $N = 29$ (tedy po dvacáté deváté srážce se moucha už jen poveze na čelním skle) a $s \doteq 482\,\mathrm{m}$. Mohli jsme si všimnout, že asi už po desátém odrazu jsou tramvaje tak blízko, že už se uražené dráhy příliš nemění, stačilo by tedy provést sumaci pouze do indexu $N = 10$.

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

/FYKOS ***@fykosak***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.